第 35 卷　第 3 期
1996 年 5 月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 35 No. 3
May 1996

有限区间截断 B 样条小波及其消失矩性质*

关 履 泰
(中山大学科学计算与计算机应用系， 广州 510275)

摘　要　构造了有限区间上的截断 B 样条小波，讨论其消失矩性质，方法简单，便于应用. 由于在有限区间上的正交性与分解重建的简易性，克服了用无穷区间小波进行信号处理时由于近似计算误差引起的处理不稳定性.

关键词　有限区间，小波，消失矩
分类号　O 241.5

小波分析是近年十分热门的研究课题[1,2]. 早期小波都定义在无穷区间上. 实际问题是有限区间的问题，1991 年 Meyer 首先提出用 Schumidt 方法正交化作出有限区间小波[3]，方法复杂. 1992 年 1 月在第七届国际逼近论会议上，Chui 与 Quak 提出用边界上的重结点样条把小波改进至有限区间上[4]；关履泰用求极值的方法处理有限区间小波[5]. Auscher 在 1992 年亦讨论了有限区间的小波. Cohen, Daubechies 与 Vial 在总结了构造周期小波，折叠法作有限区间小波等方法的基础上提出了他们的构想[6]，但作出的小波只在无穷区间上有消失矩性质而在有限区间上没有这种性质. Micchelli 和 Xu 用细分方法由二尺度方程得出矩阵构造有限区间小波[7]，需要 Schumidt 正交化.

本文提出由截断 B 样条构造半正交小波的方法，方法简单，便于应用，而且有限区间上有消失矩性质.

1　有限区间小波定义与多尺度分析

由于所有有限区间都可以经变换化为$[0,1]$区间，一般只讨论$[0,1]$上的小波，把原始的 $L^2[0,1]$中的子空间记为 $V_0^{[0,1]}$ 它由内部局部支撑基函数与边界基函数张成

$$V_0^{[0,1]}=\langle \varphi(\cdot-k):k\in S(0)\rangle+\langle \varphi_k^b:k\in B(0)\rangle$$

函数$\phi\in L^2[0,1]$，内部有限指标集为 $S(0)$，边界函数是 φ_k^b，有限指标集是 $B(0)$，类似可定义

$$V_j^{[0,1]}=\langle \varphi_{jk}:k\in S(j)\rangle+\langle \varphi_{jk}^b:k\in B(j)\rangle,\ j>0$$

有限内部指标集为 $S(j)$，边界指标集为 $B(j)$.

* 国家自然科学基金，高等学校博士学科点专项科研基金，中山大学高等学术研究中心资助项目
收稿日期：1995-07-12　　关履泰，男，50 岁，教授

定义 1　函数 $\varphi\in L^2[0,1]$ 与有限个边界函数 $\varphi^b_{jk},k\in B(j),j\geqslant 0$ 称为一个多尺度分析(MRA)，若有

(1) $V_0\subset V_1\subset\cdots$

(2) $\mathrm{Clos}_{L^2[0,1]}(\bigcup\limits_{j\geqslant 0}V_j)=L^2[0,1]$

(3) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(x+2^{-j})\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1},j\in\mathbf{Z}_+$

(4) 给定的函数形成 V_j 的 Riesz 基，即存在常数 A_j 与 B_j，$0<A_j\leqslant B_j<\infty$，$\mathrm{Inf}\ A_j>0$，$\mathrm{Sup}\ B_j<\infty$ 有 $A_j(\|\{C_k\}_{k\in S(j)}\|^2_{l^2}+\|\{C^*_k\}_{k\in B(j)}\|^2_{l^2})\leqslant\|\sum\limits_{k\in S(j)}C_k\varphi_{jk}+\sum\limits_{k\in B(j)}C^*_k\varphi^b_{jk}\|^2_2\leqslant B_j(\|\{C_k\}_{k\in S(j)}\|^2_{l^2}+\|\{C^*_k\}_{k\in B(j)}\|^2_{l^2})$ 对所有 l^2 中序列 $\{C_k\}_{k\in S(j)},\{C^*_k\}_{k\in B(j)}$ 成立，此时 φ 称为 MRA 的尺度函数，φ^b_{jk} 全体称为对应的尺度边界函数.

有正交分解　$V^{[0,1]}_{j+1}=V^{[0,1]}_j\oplus W^{[0,1]}_j$，　$j\in\mathbf{Z}_+$ 则

有
$$L^2[0,1]=V^{[0,1]}_0\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}_+}W^{[0,1]}_j$$

定义 2　函数 $\psi\in L^2[0,1]$ 与函数集 $\psi^b_{jk},k\in C(j),j\in\mathbf{Z}_+$ 称为小波及对应的边界小波，如果他们产生了 $L^2[0,1]$ 的多尺度分析的余子空间：
$$W^{[0,1]}_j=\langle\psi_{jk}:k\in T(j)\rangle+\langle\psi^b_{jk}:k\in C(j)\rangle$$
其中 $T(j)$ 与 $C(j)$ 是有限指标集.

2　截断 B 样条产生的小波空间

我们取尺度函数为 Cardinal B 样条 $N_m(x)$，m 为其阶数，可以递推定义为
$$N_1(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1)\\ 0 & x\,\overline{\in}\,[0,1)\end{cases}$$
$$N_m(x)=\int_0^1 N_{m-1}(x-t)\mathrm{d}t$$

定义 3　对 $j\in\mathbf{Z}_+$，$\mathbf{t}^{(j)}=\mathbf{t}^{(j)}_m=\{t^{(j)}_k\}^{2^j+m-1}_{k=-m+1}$，$t^{(j)}_k=k\cdot 2^{-j}$，$k=-m+1,\cdots,2^j+m-1$ 是 $[0,1]$ 中的等距划分的节点. 对节点系列 $\mathbf{t}^{(j)}$ 的 m 阶(多项式)样条空间为：
$$S_{m,\mathbf{t}^{(j)}}:=\{s\in C^{m-2}[0,1]:s|_{(t^{(j)}_k,t^{(j)}_{k+1})}\in\Pi_{m-1},k=0,\cdots,2^j-1\}$$
其中 Π_{m-1} 表示全体 m 阶($m-1$ 次)多项式组成的空间. 对 $L^2[0,1]$ 中多尺度分析由嵌套的样条子空间 $V^{[0,1]}_j$ 给出. $V^{[0,1]}_0=\Pi_{m-1}$，$V^{[0,1]}_j=S_{m,j}=S_{m,\mathbf{t}^{(j)}}$

记　$N_{i,m,j}(x)=N_m(2^jx-i)$，$i=-m+1,\cdots,2^j-1$，它形成 $S_{m,j}$ 的局部支撑基函数，即由样条函数的理论有：

定理 1　$V^{[0,1]}_j$ 的基由 Cardinal B 样条 $N_{i,m,j}(x)$，$i=-m+1,\cdots,2^j-1$ 给出，有
$$\dim V^{[0,1]}_j=2^j+m-1$$

对 $i=-m+1,\cdots,-1$ 与 $i=2^j-m+1,\cdots,2^j-1$，函数 $N_{i,m,j}(x)$ 只取其在 $[0,1]$ 上的定义，它们是截断 B 样条函数，这些函数形成边界尺度函数.

为寻找合适的小波函数张成 $W^{[0,1]}_j$ 满足正交分解 $V^{[0,1]}_{j+1}=V^{[0,1]}_j\oplus W^{[0,1]}_j$，定义样条空间
$$\tilde{S}_{2m,\mathbf{t}^{(j+1)}_m}=\langle N_{i,2m,\mathbf{t}^{(j+1)}_m}:i=-m+1,\cdots,2^{j+1}+m-1\rangle$$
满足在 0 与 1 处零边界条件的子空间为 $\tilde{S}^0_{2m,\mathbf{t}^{(j+1)}_m}$，再满足疏间距零插值条件(又称振荡条件或小波条件)的子空间为 $S^0_{2m,\mathbf{t}^{(j+1)}_m}$，即

$$\widetilde{S}^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}=\{s\in\widetilde{S}_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}:s^{(p)}(q)=0,p=0,1,\cdots,m-1;q=0.1\}$$

$$S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}=\{s\in\widetilde{S}^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}:s(\mathbf{t}_k^{(j)})=0,k=0,\cdots,2^j\}$$

注意有关系式 $t_k^{(j)}=t_{2k}^{(j+1)},k=0,\cdots,2^j$

这样 $S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$ 求 m 阶导数之后就会得到 $W_j^{[0,1]}$

定理 2 对任意的 $m\in\mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 为全体自然数组成的集合),m 阶微分算子 D^m 把空间 $S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$ 一一对应并映上到空间 $W_j^{[0,1]}$ 中

证明 先证 $s\in S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$ 有 $D^m s=s^{(m)}\in W_j^{[0,1]}$,

即:(i)$s^{(m)}\in V_{j+1}^{[0,1]}$ 且(ii)$s^{(m)}\perp V_j^{[0,1]}$

由于 $s\in C^{2m-2}[0,1]$ 是带节点列 $\mathbf{t}_m^{(j+1)}$ 的样条函数,所以 $s^{(m)}\in C^{m-2}[0,1]$ 是带同样节点列的样条函数,$s^{(m)}\in V_{j+1}^{[0,1]}$

由 $N_{i,m,j}^{(m-1)}$ 是分段常数,s 满足零边界条件及振荡条件:$s^{(p)}(q)=0,p=0,1,\cdots,m-1;q=0,1;s(t_k^{(j)})=0,k=0,\cdots,2^j$,得出

$$\int_0^1 s^{(m)}(x)N_{i,m,j}(x)\mathrm{d}x=s^{(m-1)}(x)N_{i,m,j}(x)\Big|_0^1-\int_0^1 N'_{i,m,j}(x)\mathrm{d}s^{(m-2)}(x)=\cdots=$$

$$\int_0^1(-1)^{m-1}s'(x)\,N_{i,m,j}^{(m-1)}\mathrm{d}x=(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}c_k[s(t_{k+1}^{(j)})-s(t_k^{(j)})]=0$$

另外 $s^{(m)}(x)=0$ 于$[0,1]$上表示 $s\in\Pi_{m-1}$ 是 $m-1$ 次多项式,而 $s^{(p)}(0)=0,p=0,1,\cdots,m-1$ 又可得出 $s(x)\equiv0$,所以 D^m 是一一对应的映射.

注意 $\dim V_{j+1}^{[0,1]}=2^{j+1}+m-1$,$\dim V_j^{[0,1]}=2^j+m-1$,有 $\dim W_j^{[0,1]}=2^j$. 由 $\dim\widetilde{S}_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}=2^{j+1}+2m-1$ 得出 $\dim S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}=2^{j+1}+2m-1-2m-(2^j-1)=2^j=\dim W_j^{[0,1]}$,所以 D^m 还是个满射算子,把 $S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$ 映上到 $W_j^{[0,1]}$.

定理 3 对一切 $j\in\mathbf{N}$,满足 $2^j\geqslant2m-1$,存在线性无关的 2^j-2m+2 个内部小波 ψ_{ji},$i=0,\cdots,2^j-2m+1$ 在空间 $W_j^{[0,1]}$ 中可表示为

$$\psi_{ji}(x)=2^{1-2m}\sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2i+k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}^{(m)}(x)$$

证明 由定理 2 只须证

$$\Psi_{ji}(x)=\sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2i+k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(x),i=0,\cdots,2^j-2m+1$$

是 $S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$ 中的线性无关元素.

由定义知 $\Psi_{ji}(x)\in\widetilde{S}_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$,由局部支撑性有

$$\Psi_{ji}(2(i+l)\cdot2^{-j-1})=0,\qquad l=1,\cdots,2m-2$$

从而

$$\sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2(i+l)-2i-k)=\sum_{k=0}^{2m-2}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)$$

对 $l=1,\cdots,m-1$,注意

$$\sum_{k=0}^{2l-1}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)=$$

$$\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)+\sum_{k=l}^{2l-1}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)=$$

$$\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)+\sum_{\bar{k}=0}^{l-1}(-1)^{\bar{k}+1}N_{2m}(2l-\bar{k})N_{2m}(\bar{k}+1)=0$$

对 $l=m,\cdots,2m-2$ 得到

$$\sum_{k=2(l-m)+1}^{2m-2}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)=\sum_{k=2l-2m+1}^{l-1}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)+$$

$$\sum_{k=l}^{2m-2}(-1)^k N_{2m}(k+1)N_{2m}(2l-k)=0$$

从而 Ψ_{ji}满足振荡条件，$\Psi_{ij}\in S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$，它的线性无关性可由 Ψ_{ji}的局部支撑的交叠性得出.

定理 2 给出一种构造有限区间样条小波的方法：由 Cardinal B 样条用边界条件与振荡条件进行改造，得出 $S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$ 的基函数，经 m 阶微分算子 D^m 作用就产生小波空间 $W^{[0,1]}$的基函数，但是这样的基函数局部支撑性不够好. 定理 3 指出对内部小波有办法组出紧支集的小波基. 下面的定理 4 讨论对应的紧支集小波边界函数. 我们把由定理 2 得出的 $\tilde{S}^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$中的边界基函数记为 $B_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$，$k=-m+1,\cdots,-1$

定理 4　对 $j\in\mathbf{N}$，$2^j\geqslant 2m-1$，在边界 0 处的 $m-1$ 个边界小波可表示为

$$\psi_{ji}(x)=\Big(\sum_{k=-m+1}^{-1}(B^{-1}r_i)B^{(m)}_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(x)+$$

$$\sum_{k=0}^{2m-2+2i}(-1)^k N_{2m}(k+1-2i)N^{(m)}_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(x)\Big)\cdot 2^{1-2m}$$

式中，$B=(B_{-k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(t_l^{(j)}))_{1\leqslant l,k\leqslant m-1}$；

$$r_j=\Big(-\sum_{k=0}^{2m-2+2i}(-1)^k N_{2m}(k+1-2i)N_{2m}(2l-k)\Big)^T_{1\leqslant l\leqslant m-1}$$

局部支撑集为$[0,(2m-1+i)2^{-j}]$，$i=-m+1,\cdots,-1$

证明　因为边界小波由 D^m 作用到 $S^0_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$的边界基函数与相关的 $2m-1+2i$ 个内部基函数的线性组合而产生，对 $i=-m+1,\cdots,-1$ 记

$$\Psi_{ji}(x)=\sum_{k=-m+1}^{-1}\alpha_{ik}B_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(x)+\sum_{k=0}^{2m-2+2i}(-1)^k N_{2m}(k+1-2i)N_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(x)$$

则　$\mathrm{Supp}\,\Psi_{ji}=[0,(4m-2+2i)2^{-j-1}]$

利用振荡条件 $\Psi_{ji}(2l\cdot 2^{-j-1})=0\qquad l=1,\cdots,m-1$

得出线性代数方程组：

$$\sum_{k=-m+1}^{-1}\alpha_{ik}B_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(2l\cdot 2^{-j-1})=-\sum_{k=0}^{2m-2+2i}(-1)^k N_{2m}(k+1-2i)\,N_{2m}(2l-k)$$

因为 $\mathrm{Supp}\,B_{-l,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}=[0,(2m-l)2^{-j-1}]$且 $2l\cdot 2^{-j-1}\in(0,(2m-(m-l))2^{-j-1})$，即 $2l\cdot 2^{-j-1}$是 $B_{-m+l,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$的内点，从而 Schoenberg－Whitney 插值定理的条件得到满足，矩阵

$$B=(B_{-k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}(t_l^{(j)}))_{1\leqslant l,k\leqslant m-1}\text{非奇异，记}$$

$$r_i=\Big(-\sum_{k=0}^{2m-2+2i}(-1)^k N_{2m}(k+1-2i)N_{2m}(2l-k)\Big)^T_{1\leqslant l\leqslant m-1}$$

解出　$\alpha_i=B^{-1}r_i\qquad i=-m+1,\cdots,-1$

而 Ψ_{ji}的局部支撑性由 $B_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$及 $N_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$的局部支撑性得出.

推论　对于 $j\in\mathbf{N}$，$2^j\geqslant 2m-1$ 在边界 1 处的 $m-1$ 个边界小波可以表示为 $\psi_{j,i}(x)=$

$\psi_{j,i-2^j-1}(1-x)$， $i=2^j-m+2,\cdots,2^j$ 而 $\psi_{j,-m+1},\cdots,\psi_{j,-1}$为在边界 0 处的 $m-1$ 个边界小波.

这结论由定理 4 与 $B_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$及 $N_{k,2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}$的对称性得出.

3 消失矩性质与例子

我们作出的有限区间截断 B 样条小波有有限区间的消失矩性质

定理 5 对任意的 $m\in\mathbf{N}$,有限区间截断 B 样条小波 $\psi_{jk}(k\in T(j))$与 $\psi_{jk}^b(k\in C(j))$有

$$\int_0^1 x^l\psi_{jk}(x)\mathrm{d}x=0,\quad k\in T(j),\ l=0,1,\cdots,m-1$$

与

$$\int_0^1 x^l\psi_{jk}^b(x)\mathrm{d}x=0,\quad k\in C(j),\ l=0,1,\cdots,m-1$$

证明 由定理 2,必定存在 $\Psi_{jk}\in S_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}^0$及 $\Psi_{jk}^b\in S_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}^0$使 $\psi_{jk}(x)=\Psi_{jk}^{(m)}(x),\psi_{jk}^b(x)=\Psi_{jk}^{b(m)}(x)$,由 $S_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}^0$的定义得知

$$\Psi_{jk}^{(p)}(q)=\Psi_{jk}^{b(p)}(q)=0,\ q=0,1;\ p=0,1,\cdots,m-1$$

且 $$\Psi_{jk}(t_l^{(j)})=\Psi_{jk}^b(t_l^{(j)})=0,\ l=0,\cdots,2^j,$$ 从而对 $k\in T(j)$ 有

$$\int_0^1 x^l\psi_{jk}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^l\Psi_{jk}^{(m)}(x)\mathrm{d}x=\Psi_{jk}^{(m-1)}(x)\cdot x^l\Big|_0^1-\int_0^1 l\cdot x^{l-1}\Psi_{jk}^{(m-1)}(x)\mathrm{d}x=\cdots=0,\ l=1,\cdots,m-2$$

$$\int_0^1\psi_{jk}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\Psi_{jk}^{(m)}(x)\mathrm{d}x=\Psi_{jk}^{(m-1)}(1)-\Psi_{jk}^{(m-1)}(0)=0$$

$$\int_0^1 x^{m-1}\psi_{jk}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\Psi_{jk}^{(m)}(x)\cdot x^{m-1}\mathrm{d}x=\cdots=(-1)^{m-1}(m-1)!\int_0^1\Psi'_{jk}(x)\mathrm{d}x$$

同理可证 $$\int_0^1 x^l\psi_{jk}^b(x)\mathrm{d}x=0,k\in C(j),\ l=0,1,\cdots,m-1$$

例:$m=2$ 时的有限区间截断 B 样条小波,先求出 $\tilde{S}_{2m,\mathbf{t}_m^{(j+1)}}^0$中的边界基函数 $B(x)$,由局部支撑性,设 $B(x)=\sum_{i=1}^{3}a_iN_4(2^{j+1}x+i)$,用边界条件 $B(0)=B'(0)=0$ 求出

$$B(x)=N_4(2^{j+1}x+3)-\frac{1}{2}N_4(2^{j+1}x+2)+N_4(2^{j+1}x+1)$$

代入公式得出内部小波

$$\psi_{ji}(x)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}N''_{2i,4,\mathbf{t}_2^{(j+1)}}(x)-\frac{2}{3}N''_{2i+1,4,\mathbf{t}_2^{(j+1)}}(x)+\frac{1}{6}N''_{2i+2,4,\mathbf{t}_2^{(j+1)}}(x)\right)$$

利用定理 4,求出在 0 处的边界小波

$$\psi_{j,-1}(x)=-\frac{2}{3}B''(x)+\frac{1}{6}N''_{0,4,\mathbf{t}_2^{(j+1)}}(x)$$

参 考 文 献

1 Chui C K. An Introdution to Wavelets. Boston: Academic Press, 1992

2 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBM-NSF Regional Conference Series in Applied Math. Philadelphia, SIAM, 1992

3 Meyer Y. Ondelettes et operateurs. Paris: Hermann, 1990

4 Chui C K. Quak E. Wavelets on a bounded interval. Texas A&M Univ: CAT Report,1992. 265

5 Guan Lutai. Spline-wavelet interpolation and decomposition with boundary conditions. 7—th Texas International Symposium in Approximation Theory, 1992

6 Cohen A, Daubechies I, Vial P. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. AT&T Bell Lab. Report, 1993

7 Micchelli C A, Xu Y. Using the matrix refinement equation for the construction of wavelets on invariant sets. preprinted, 1993

Truncated B-spline-wavelets on a Bounded Interval and its Vanishing Moment Property

Guan Lutai *

Abstract The aim of this paper is to present an approach to the study of multiresolution analysis and B-spline-wavelets on a bounded interval. In this case we no longer have orthegonality in one scale, but there are exlicit formulate of these wavelets and a vanishing moment property on a bounded interval.

Keywords bounded interval, B-spline-wavelet, vanishing moment

* Department of Scientific Computation and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275