

非线性振动 IHB T 法的新算法^{*}

刘世龄

詹 胜

(香港理工大学土木工程系, 香港九龙) (中山大学应用力学与工程系)

摘 要 提出一种新的求解时间变换系数的方法, 充分发挥时间变换的作用, 只需较少的谐波项便可求解一般近似法不能求解的问题, 改善了某些求解过程的收敛性.

关键词 强非线性振动, IHB T 法, 新算法

分类号 O 322

用近似式表达非线性振动方程的解, 并作出解的图象, 这对于非线性很强的振动是件不易的事. 例如 Van der Pol 方程

$$d^2x/dt^2 + x = X(1 - x^2)dx/dt \quad (1)$$

和耦合 Van der Pol 振子

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = X(\lambda - x_1^2)\frac{dx_1}{dt} + \underline{2}(-x_1 + x_2) \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 = X(\lambda - x_2^2)\frac{dx_2}{dt} + X(-x_1 + W_{x2}) \end{cases} \quad (2)$$

当 X 较大时, 例如 $X \geq 10$, 用一般的近似法就很难求解了^[1,2]. 然而, 由本文作者提出的具有时间变换 IHB 法 (简称 IHB T 法^[3]), 可有效地解决这些问题. 采用适当的时间变换, 可以大大减少解中的谐波项. 在这里, 寻找适当的时间变换系数 T_q, U_q 是 IHB T 法的十分关键的一步, 我们曾采用最优化方法^[4]求出 T_q, U_q , 优化的目标函数是

$$F_{\text{obj}} = a_N^2 + b_N^2 = \min \quad (3)$$

式中 a_N, b_N 是振动方程解的富氏级数表达式中的最高谐波项系数, 它们是 T_q, U_q 的函数.

1 IHB T 法的新算法

多自由度非线性振动方程通常可写成

$$f_i \left[\frac{d^2x_i}{dt^2}, \frac{dx_i}{dt}, \dots, \frac{dx_p}{dt}, x_1, \dots, x_p, X_-, k, t \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (4)$$

令 $t = kt$, 方程 (4) 变为

$$f_i \left[w^2 \frac{d^2x_i}{d\tau^2}, k \frac{dx_i}{d\tau}, \dots, w \frac{dx_p}{d\tau}, x_1, \dots, x_p, X_-, \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (5)$$

引入时间变换的一般式, 即

* 香港理工大学基金资助项目

收稿日期: 1996-05-02 刘世龄, 男, 66 岁, 高级讲师, 名誉高级研究员

$$f = \epsilon_q \sum_{q=1}^M \left(T_q \sin q \epsilon - U_q \cos q \epsilon + U_j \right) / q \quad (6)$$

这里的 ϵ 是新的时间坐标系, 由 (6) 式得

$$df/d\epsilon = 1 - \sum_{q=1}^M (T_q \cos q \epsilon + U_q \sin q \epsilon) = z \quad (7)$$

于是有:

$$\frac{dx_i}{df} = \frac{dx_i}{d\epsilon} / z = \dot{x}_i / z, \quad \frac{d^2 x_i}{df^2} = \frac{d^2 x_i}{d\epsilon^2} / z^2 - \frac{dx_i}{d\epsilon} \frac{dz}{d\epsilon} / z^3 = \ddot{x}_i / z^2 - \dot{x}_i \dot{z} / z^3 \quad (8)$$

把 (6) (8) 式代入方程 (5), 得

$$F_i(x_i, x_1, \dots, x_p, x_1, \dots, x_p, z, z, z, k, \epsilon) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (9)$$

假设 $X_{i0} = k_0 z_0$ 和 $x_{i0} (i = 1, 2, \dots, p)$ 是方程 (9) 的初始近似解, 而

$$X = X_0 + \Delta X, z = z_0 + \Delta z, x_i = x_{i0} + \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (10)$$

是满足方程 (9) 的更精确的解, 代入后, 将高阶小量舍去, 得到增量的线性化方程

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right]_0 \Delta x_i + \sum_{j=1}^p \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_0 \Delta x_j + \sum_{j=1}^p \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_0 \Delta x_j + \left[\frac{\partial F_i}{\partial z} \right]_0 \Delta z + \left[\frac{\partial F_i}{\partial z} \right]_0 \Delta z + \\ & \left[\frac{\partial F_i}{\partial k} \right]_0 \Delta k + \left[\frac{\partial F_i}{\partial \epsilon} \right]_0 \Delta \epsilon + \left[\frac{\partial F_i}{\partial k} \right]_0 \Delta k = -[F_i]_0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \quad (11)$$

求解方程 (11), 可得各增量, 代入 (10) 式, 并以所得的结果作为新的初始值, 再次迭代, 直至满足所需的精度为止. 为求解方程 (11), 可假设

$$\begin{cases} x_{i0} = a_{i0} + \sum_{j=1}^{N_i} (a_{ij} \cos j \epsilon + b_{ij} \sin j \epsilon) = S_i X_i \\ z_0 = 1 - \sum_{q=1}^M (T_q \cos q \epsilon + U_q \sin q \epsilon) = 1 - S_z Z \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (12)$$

式中, $S = [1, \cos \epsilon, \cos 2\epsilon, \dots, \cos N_i \epsilon, \sin \epsilon, \sin 2\epsilon, \dots, \sin N_i \epsilon]$

$$X_i = [a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN_i}, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iN_i}]^T$$

$$S_z = [\cos \epsilon, \cos 2\epsilon, \dots, \cos M \epsilon, \sin \epsilon, \sin 2\epsilon, \dots, \sin M \epsilon]$$

$$Z = [T_1, T_2, \dots, T_M, U_1, U_2, \dots, U_M]^T$$

应当指出, 根据实际情况, a_0 可以是 0; j 可以是 1, 3, 5, $\dots$; q 可以是 2, 4, 6, $\dots$. 相应于 (12) 式, $\Delta x_i, \Delta z$ 可以被写成

$$\begin{cases} \Delta x_i = \Delta a_{i0} + \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta a_{ij} \cos j \epsilon + \Delta b_{ij} \sin j \epsilon) = S_i \Delta X_i \\ \Delta z = S_z \Delta Z \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (13)$$

式中 $\Delta X_i = [\Delta a_{i0}, \Delta a_{i1}, \dots, \Delta a_{iN_i}, \Delta b_{i1}, \Delta b_{i2}, \dots, \Delta b_{iN_i}]^T, \Delta Z = [\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_M, \Delta U_1, \Delta U_2, \dots, \Delta U_M]^T$

把 (13) 式代入方程 (11) 得

$$D \Delta X = -F_0 - E \Delta X - U \Delta Z - K \Delta k \quad (14)$$

$$\text{式中 } \Delta X = \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \vdots \\ \Delta X_p \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_p \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial X \\ \vdots \\ \partial F_p / \partial X \end{bmatrix}_0, \quad U = \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial Z \\ \vdots \\ \partial F_p / \partial Z \end{bmatrix}_0, \quad K = \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial k \\ \vdots \\ \partial F_p / \partial k \end{bmatrix}_0$$

矩阵 D 的子阵 D_i 的元素为

$$\begin{cases} D_{ij} = W_j \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_0 \dot{S}_j + \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_0 \dot{S}_j + \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_0 S_j \\ D_{i,p+1} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial z} \right]_0 \dot{S}_z + \left[\frac{\partial F_i}{\partial z} \right]_0 S_z \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p) \quad (15)$$

$$\text{式中 } W_j = \begin{cases} 1(i=j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$$

对方程(14)在一个周期内运用谐波平衡法,可得

$$K \Delta X = -R - L \Delta X - G \Delta - W \Delta k \quad (16)$$

$$\text{式中 } K = \int_0^{2\pi} S D d\epsilon, \quad R = \int_0^{2\pi} S F_0 d\epsilon, \quad L = \int_0^{2\pi} S E d\epsilon, \quad G = \int_0^{2\pi} S U d\epsilon, \quad W = \int_0^{2\pi} S K d\epsilon,$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{1M} & & & 0 \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_p \end{bmatrix}^T, \quad S_{1M} = [1, \cos \epsilon, \dots, \cos(N+M)\epsilon, \sin \epsilon, \dots, \sin(N+M)\epsilon].$$

应当指出,推导开始就把时间变换的 z 当作与 $x_i (i=1, 2, \dots, p)$ 同等的未知函数来看待,见方程(9),(11).与 IHB法相比, IGBT法增加了 $2M$ 个未知数,即 $T_q, U_q (q=1, 2, \dots, M)$, 因此要实现同时解出 T_q, U_q 和 a_i, b_j , 除了将它们当作同等的未知数外,还必须补充 $2M$ 个方程.根据非线性振动方程的特点,把解的有限项富氏级数代入方程后,方程中将出现比解表达式的最高谐波成分更高阶的若干谐波分量.在运用谐波平衡法时,把后继的高阶谐波分量考虑进去便可补充建立 $2M$ 个方程,使方程数目与未知数的数目相等,实现 T_q, U_q 与 a_i, b_j 同时解出之目的.我们将谐波平衡的补充方程取在第一个振动方程式上是出于编写程序的方便.当然,补充的谐波平衡方程也可以取在第二或其他振动方程式上.

增量 $\Delta X, \Delta_-, \Delta k$ 可以按以下办法处理:

(1) 自治系统: 这时 k 是未知数.我们可以固定两个参数 X_- 中的一个,譬如 $_-$, 则 $\Delta_- = 0$. 由于 k 与参数 X 有关,在解方程时,不能同时取 $\Delta k = 0$ 和 $\Delta X_- = 0$, 除非所给的初始值 X 和 k_0 碰巧是方程的解.这时可以固定 X 和 k 中的一个,即取 $\Delta X_- = 0$ 或 $\Delta k = 0$. 由于是自治系统,方程解的富氏级数系数中的一个可以被固定,例如 $b_{11} = 0, \Delta b_{11} = 0$, 这样做只涉及到时间轴零点的选取,不影响方程的解.因此可以以 Δk 或 ΔX 代替 Δb_{11} 之位置,以向量 W 或 L 代替 K 矩阵中原来对应于 Δb_{11} 的那一列向量,从而使方程的个数与未知数的个数相等.

(2) 强迫振动: k 为已知, $b_{11} \neq 0, \Delta b_{11} \neq 0$.

这时可取 $\Delta k = 0, \Delta X_- = 0, \Delta_- = 0$, 对方程(16)进行求解,然后对 k 逐点进行扫描计算,以获得频响曲线.同样地,也可以对参数 X 和 $_-$ 进行扫描求解.

另外,如需要的话,也可以为三个未知数 $\Delta X, \Delta_-, \Delta k$ 再建立适当的补充方程,如同前面所讲的那样,使方程数目与未知数数目相等.

为了更有效地计算矩阵 K , 向量 R, L, W , 用 FFT 方法把 $[F_i / \partial x_j]_0, [\partial F_i / \partial x_j]_0, [\partial F_i / \partial z]_0$ 及 $[\partial F_i / \partial x_j]$ 等表示为富氏级数,利用三角函数的正交性,只要作简单的系数加减和乘法运算便可公式化地算出复杂的 K 矩阵各元素,从而代替从 0 到 2π 的重复多次的繁杂积分计算.如矩阵 K 中的子矩阵 $K_{ij} (j=1, 2, \dots, P)$ 可表示为:

$$K_{ij} = \int_0^{2\pi} S_{1M}^T D_{ij} d\epsilon = W_{ij} \int_0^{2\pi} S_{1M}^T \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_j} \right]_0 \ddot{s}_j d\epsilon + \int_0^{2\pi} S_{1M}^T \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_j} \right]_0 \dot{s}_j d\epsilon + \int_0^{2\pi} S_{1M}^T \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_j} \right]_0 s_j d\epsilon = W_{ij} \begin{bmatrix} CC1, CS1 \\ SC1, SS1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CS2, CC2 \\ SS2, SC2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CC3, CS3 \\ SC3, SS3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

把 $\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_j} \right]_0, \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_j} \right]_0$ 和 $\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_j} \right]_0$ 的富氏级数,即 $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_f/2} (A^k \cos k\epsilon + B^k \sin k\epsilon)$ 代入(17)式,可得

$$\begin{cases} CC1(V_0, l) = -c l^2 (A_{V_0+} + A_{V_0-l}) / 2, CS1(V_0, l) = -c l^2 (B_{V_0+} - B_{V_0-l}) / 2 \\ SC1(V, l) = -c l^2 (B_{V+} + B_{V-l}) / 2, SS1(V, l) = -c l^2 (A_{V+} - A_{V-l}) / 2 \end{cases} \quad (18)$$

其中 $V_0 = 0, 1, \dots, N+M$; $V = 1, 2, \dots, N+M$; $l = 1, 2, \dots, N_1$. 至于 $CS2$ $CC3$ 等都与 (18) 式相似. 为方便编程和 (18) 式计算, 将系数 A_k B_k 向负方向延拓, 即 $A_{-k} = A_k$, $B_{-k} = -B_k$.

K 矩阵中其余的子矩阵和 R L G W 等的推导计算与上相同, 不再重复.

如果方程解的谐波项和时间变换项的取法与 (12) 式和 (6) 式不同, 则只要在有关的计算式中作相应改变就可以了.

2 应 用

为了检验新算法的有效性, 我们用它求解具有不同时期曲线的 5 个方程, 取得很好的结果. 限于篇幅, 只给出其中两个算例.

2.1 Van der Pol 振子

很多作者研究过它, 当方程 (1) 的 X 较大时 ($X \gg 1$), 张弛振荡的运动变成突发性的, 见图 1. 2 在这种很强的非线性振荡下, 一般的近似法很难对它进行求解. 文献 [1] 指出, 当 $X \gg 1$ 时, 普通的摄动法将会算出不正确的结果. 然而, 本文的新算法只用 8 对谐波项和 7 对时间变换项便可算出 $X \approx 100$ 时方程的解. 为了检验新算法计算结果的正确性, 用龙格-库塔法、IHB 法和优化 T U 的 IHB T 法算出的结果与之比较, 见图 1(c), 四种方法的计算结果是重合的. 这里需要指出, 当 $X \approx 5$ 时, 要使算出的结果具有重合的极限环和相同的 k 值, 即 $k = 0.54108 \text{ rad/s}$, IHB 法最少需要 40 对谐波项; 采用 1 对时间变换项和优化解出的 IHB T 法最少需要 9 对谐波项; 而本文的新解法只需 2 对时间变换项和 5 对谐波项就行了, 这时的时期曲线见图 1(b). 令人注意的是, 本文的新解法可以把一个很强的非线性振动的解变换成只需 $a \cos \sigma$ 一项便可表达出来, 见图 1(a), 不过这时需要用 12 对时间变换项. 虽然把高阶谐波成分全部消除了, 但计算时间增加, 因为这时求解方程组的维数为 $2(1+12)$, 大于 $2(2+5)$.

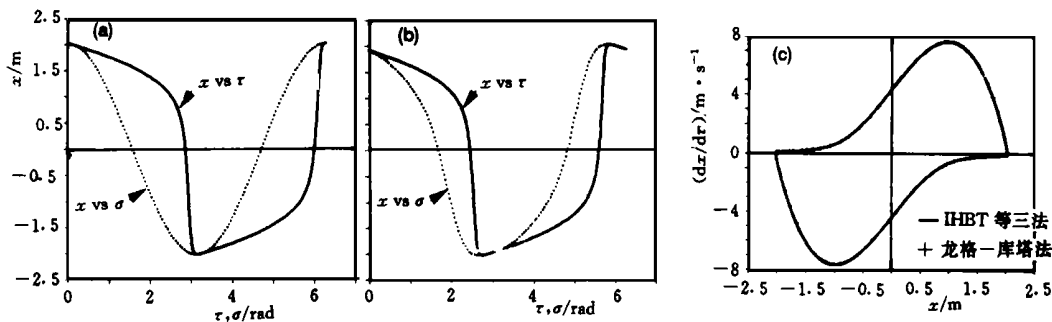


图 1 $X \approx 5$ 时方程 (1) 的时期曲线和极限环

Fig. 1 Time histories and limit cycle of equation (1) for $\epsilon = 5$

新解法充分发挥时间变换的作用不仅从图 1(a) 而且从图 2 也能清楚地看出来. 象图 2 所示的这种特强非线性振荡 ($X \approx 100$), 一般近似法不可求解. 振荡位移曲线从一侧突发性地跑到另一侧, 而且这段位移迹线几乎与时间轴垂直. 采用 7 对时间变换项进行变换后, 位移

变化速率从 $[dx/dt]_{\max} = 3\,466\text{ m/rad}$ 变为对新时间坐标系的 $[dx/d\epsilon]_{\max} = 4.99\text{ m/rad}$, 它们之比是 704, 这时只需 8 对谐波项就求出了如图 2 所示的时程曲线和光顺的极限环.

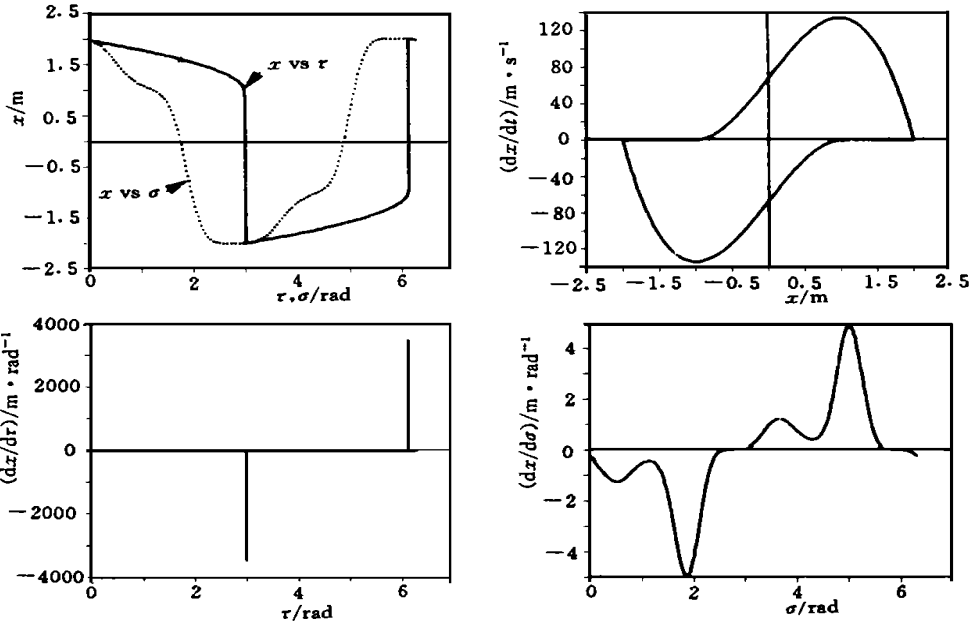


图 2 $\epsilon = 100$ 时, 方程 (1) 的解, $k = 0.038\,59\text{ rad/s}$

Fig. 2 Solution of equation(1) for $\epsilon = 100, \omega = 0.038\,59\text{ rad/s}$

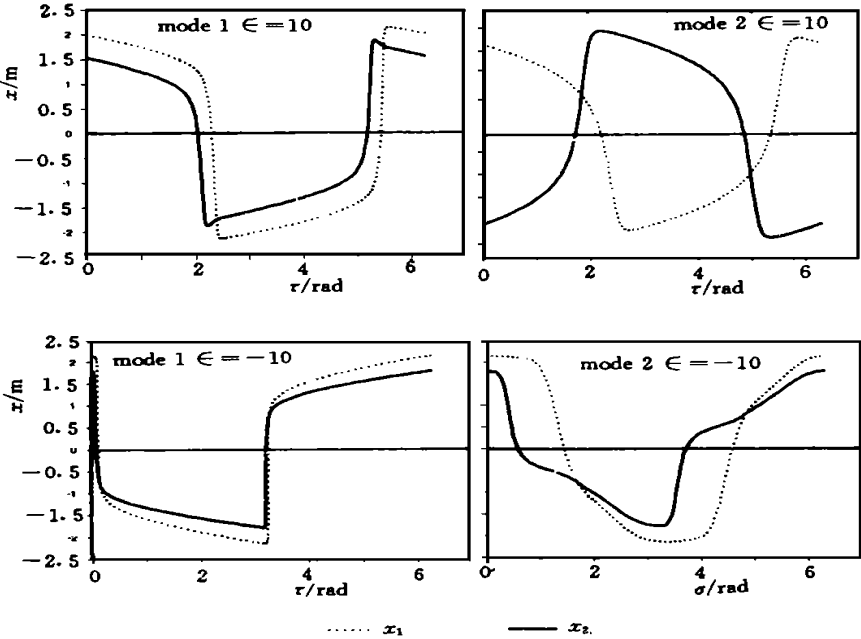


图 3 $\epsilon = \pm 10$ 时方程 (2) 解的时程曲线

Fig. 3 Time hietories of solutions of equation (2) for $\epsilon = \pm 10$

2.2 耦合 Van der Pol 振子

耦合振子见方程 (2), X 作为非线性项和耦合项前面的系数, 当它的值增大时, 非线性和耦合作用将变强. 许多学者对此振子作过研究^[2,5,6], 他们所取的 X 值在 0.1~0.35 之间. 本文的新解法可求出 $X \in [-10, 10]$ 的耦合振子的解. 其他参数取值为: $\lambda = 1, \omega = 0.4, W = 0.56$. 当 $X \pm 10$ 时, 计算结果如图 3 所示.

从图 3 可看出, 这是十分强的非线性多自由度振动, 一般的近似法也是难以求解的. 新解法所需的时间变换项和谐波项如下:

$X = 10$, mode 1, $k = 0.6073 \text{ rad/s}$, $N_1 = 7, N_2 = 20, M = 4$

$X = 10$, mode 2, $k = 2.1101 \text{ rad/s}$, $N_1 = 6, N_2 = 16, M = 3$

$X = -10$, mode 1, $k = 0.099509 \text{ rad/s}$, $N_1 = 8, N_2 = 28, M = 4$

参 考 文 献

- 1 Burton T D. Non-linear oscillator limit cycle analysis using a time transformation approach. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1982, 17: 7~19
- 2 Lau S L, Yuen S W. Solution diagram of non-linear dynamic systems by the IHB method. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 167 (2): 303~316
- 3 Lau S L. Incremental harmonic balance method with time transformation for nonlinear vibrations. *Proc. Asian Pacific Conference Computational Mechanics*. Netherlands: A. A. Balkema, 1991. 395~400
- 4 南京大学数学系. 最优化方法. 北京: 科学出版社, 1984. 111~137
- 5 刘世龄, 徐兆. 多自由度非线性振动系统的内共振. *应用数学和力学*, 1992, 13(1): 27~34
- 6 Rand R H, Holmes P J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled Van der Pol oscillators. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1980, 15: 387~399

A New Solution of IHBT Method for Nonlinear Vibration

Lau Sailing Zhan Sheng^{*}

Abstract A new solution to obtain time transformation coefficients is presented. It makes the time transformation more effective. Some problems which are difficult for conventional approximate methods can be easily solved by this method. The number of harmonic terms is greatly reduced, and much of the computation time will be saved. Furthermore, it can improve the convergence of solution.

Keywords strongly nonlinear vibration, the IHBT method, new solution

^{*} Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275