

# 极限环分析的椭圆函数 L-P 方法\*

陈树辉

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

**摘要** 提出一个椭圆函数 L-P 方法, 适合于具有强非线性的广义 Van der Pol 方程的极限环分析. 该法采用椭圆函数代替经典的 L-P 法中的圆函数. 与其它只给出一阶近似解的椭圆函数方法相比, 此法给出的近似解具有更高的精确度.

**关键词** 极限环, 椭圆函数, L-P 法

**分类号** O 322

对于强非线性振动系统  $\ddot{x} + g(x) = \varepsilon f(x, \dot{x})$ , 国内外不少学者已提出了一些分析方法<sup>[1~3]</sup>. Margallo 等人提出的椭圆函数 HB 方法<sup>[4]</sup>, Yuste 等人提出的椭圆函数 K-B 方法<sup>[5]</sup>. 已有的这些椭圆函数方法, 大多数只给出一阶近似解, 即是说, 这些解的表达式并没有明显包含参数  $\varepsilon$ , 这样的解只有当  $\varepsilon$  是很小的数值时才正确, 当  $\varepsilon$  稍为大一些时, 就出现较大的误差.

本文提出一个分析广义 Van der Pol 方程极限环的新的渐近方法, 称为椭圆函数 L-P 方法. 在这个方法中, 采用雅可比椭圆函数代替经典 L-P 法中的圆函数, 从而把适合于弱非线性系统的 L-P 方法扩展到适合于强非线性系统的极限环分析.

## 1 椭圆函数 L-P 方法

考虑广义 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + c_1 \dot{x} + c_3 x^3 = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad (1)$$

这里“ $\cdot$ ”表示对时间  $t$  求导.  $\varepsilon$  是小参数,  $\varepsilon > 0$ . 引入新变量

$$\tau = \omega t \quad (2)$$

$\omega$  是待求的代表非线性系统的频率. 于是, 方程(1)成为

$$\omega^2 x'' + c_1 x' + c_3 x^3 = \varepsilon \omega(1 - x^2)x' \quad (3)$$

这里“ $'$ ”表示对新变量  $\tau$  求导. 把  $x$  和  $\omega$  展开成参数  $\varepsilon$  的幂级数

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau), \quad \omega = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \quad (4)$$

\* 中山大学高等学术研究中心基金会(香港)资助项目

收稿日期: 1995-07-06 陈树辉, 男, 51 岁, 副教授

式中  $\omega_n$  是待定常数,  $x_n(\tau)$  是待求的周期函数. 把方程(4)代入方程(3), 并且比较方程两边关于  $\varepsilon$  的同次幂的系数, 可得

$$\varepsilon^0: \omega_0^2 x_0'' + c_1 x_0 + c_3 x_0^3 = 0 \quad (5)$$

$$\varepsilon^1: \omega_0^2 x_1'' + (c_1 + 3c_3 x_0^2) x_1 = \omega_0 (1 - x_0^2) x_0' - 2\omega_0 \omega_1 x_0' \quad (6)$$

$$\varepsilon^2: \omega_0^2 x_2'' + (c_1 + 3c_3 x_0^2) x_2 = -2\omega_0 x_0 x_0' x_1 + (1 - x_0^2) (\omega_0 x_1' + \omega_1 \omega_0') - (\omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_2) x_0' - 2\omega_0 \omega_1 x_1' - 3c_3 x_0 x_1^2 \quad (7)$$

方程(5)有精确解, 以椭圆函数表示. 根据系数  $c_1$  和  $c_3$  的正负号, 我们可以把方程(5)分为 3 种类型.

**类型 I:**  $c_1 > 0, c_3 > 0$ . 这时方程(5)的解为

$$x_0 = A_0 \operatorname{cn}(\tau, k) = A_0 \operatorname{cn} \tau \quad (8)$$

$$\omega_0^2 = c_1 + c_3 A_0^2, \quad k^2 = c_3 A_0^2 / 2\omega_0^2 \quad (9)$$

式中,  $\operatorname{cn}(\tau, k)$  称为余弦椭圆函数,  $A_0, k$  分别称为椭圆函数的振幅和模. 余弦椭圆函数的周期为  $4K$ ,  $K$  为第一类完全椭圆积分.

用  $x_0'$  乘方程(6)的两边并积分得

$$\omega_0^2 [x_0' x_1' - x_0 x_1''] \Big|_0^\tau = \int_0^\tau [\omega_0 (1 - x_0^2) x_0' - 2\omega_0 \omega_1 x_0'] x_0' d\tau \quad (10)$$

推导上述方程利用如下的结果

$$\omega_0^2 x_0'' + c_1 x_0' + 3c_3 x_0^2 x_0' = 0 \quad (11)$$

这可由方程(5)对  $\tau$  求导而得. 在方程(10)中取  $\tau = 4K$ , 可得

$$\int_0^{4K} \omega_0 (1 - x_0^2) x_0'^2 d\tau = 0 \quad (12)$$

积分后可得

$$c_0 I_{11}^K - c_2 A_0^2 I_{12}^K = 0 \quad (13)$$

$$\text{式中, } I_{11}^K = \int_0^{4K} \operatorname{sn}^2 \tau \operatorname{dn}^2 \tau d\tau = \frac{4}{3k^2} [k'^2 K + (2k^2 - 1)E] \quad (14)$$

$$I_{12}^K = \int_0^{4K} \operatorname{sn}^2 \tau \operatorname{cn}^2 \tau \operatorname{dn}^2 \tau d\tau = \frac{4}{15k^4} [k'^2 (k^2 - 2)K + 2(k^4 + k'^2)E] \quad (15)$$

其中,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $E$  称为第二类完全椭圆积分.  $k^2, \omega_0, A_0$  可由方程(9)和(13)联合求得.

方程(12)是普通 L-P 法摄动过程中消除长久项的推广. 从方程(11)可以看出,  $x_0'$  是方程(6)的齐次方程的解, 根据微分方程的理论, 方程(6)的特解可以表达为以下的形式

$$x_1 = x_0' \int \frac{1}{x_0'^2} \left[ \int \frac{1}{\omega_0} (1 - x_0^2) x_0'^2 d\tau \right] d\tau - \frac{\omega_1}{\omega_0} x_0' \tau \quad (16)$$

为了使  $x_1/x_0$  有界, 必须令  $\omega_1 = 0$ .

$$\text{于是 } x_1 = x_0' \int \frac{1}{x_0'^2} \left[ \int \frac{1}{\omega_0} (1 - x_0^2) x_0'^2 d\tau \right] d\tau \quad (17)$$

值得指出的是这里略去了方程(6)齐次方程的通解. 因为通解的积分常数依赖于初始条件, 而我们所求的是不依赖于初始条件的稳态解. 可以继续摄动下去, 求下一阶近似解  $x_2$  和  $\omega_2$ . 但是计算实践表明, 近似解  $x = x_0 + \varepsilon x_1$  对于适度值  $\varepsilon$  而言已足够准确了.

**类型 II:**  $c_1 > 0, c_3 < 0$ . 这时方程(5)的解为

$$x_0 = A_0 \operatorname{sn}(\tau, k) = A_0 \operatorname{sn} \tau \quad (18)$$

$$\omega_0^2 = c_1 + \frac{1}{2} c_3 A_0^2, \quad k^2 = -\frac{c_3 A_0^2}{2\omega_0^2} \quad (19)$$

**类型 III** :  $c_1 < 0, c_3 > 0$ . 这时方程(5)的解为

$$x_0 = A_0 \operatorname{dn}(\tau, k) = A_0 \operatorname{dn} \tau \tag{20}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} c_3 A_0^2, \quad k^2 = 2(1 + c_1/c_3 A_0^2) \tag{21}$$

类似于类型 I 的推导,对于类型 II 和类型 III,我们可以导出求  $x_1$  和  $A_0$  的公式.

值得指出的是,如果  $c_3 = 0$ ,则  $k = 0, \operatorname{cn}(\tau, 0) = \cos \tau, \operatorname{sn}(\tau, 0) = \sin \tau$ . 于是,椭圆函数 L-P 法就成为经典的 L-P 法了. 所以,椭圆函数 L-P 法就是经典的 L-P 法在强非线性系统下的推广.

## 2 算 例

**算例 1** 考虑方程

$$\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \tag{22}$$

徐兆采用非线性时间变换法研究此方程<sup>[2]</sup>,得到很好的结果. 采用本文的方法,由公式(9)和(13)求得  $A_0 = 1.9365, \omega_0 = 2.18, k = 0.628$ . 图 1(a)和(b)分别表示当  $\varepsilon = 0.1$  和  $\varepsilon = 0.4$  时的极限环. 图中还与 Runge-Kutta (R-K)方法的数值结果作比较. 从图中可以看出,本文的椭圆函数 L-P 法的计算结果是令人满意的,它与 R-K 法的结果几乎一致.

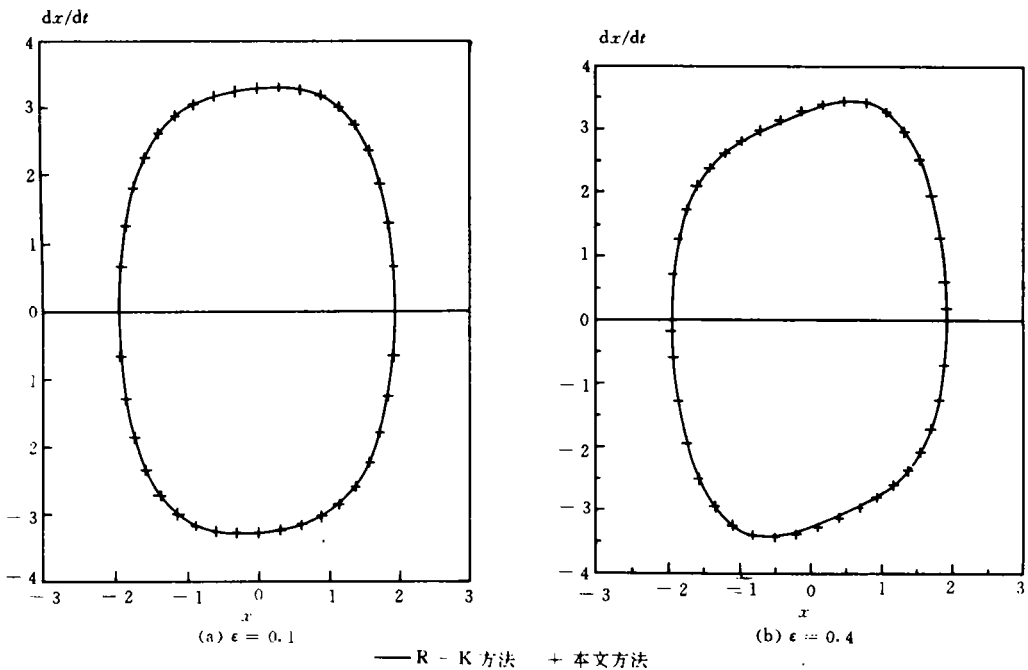


图 1 方程(22)的极限环

Fig. 1 Limit cycles of equation (22)

**算例 2** 考虑方程

$$\ddot{x} + x^3 = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \tag{23}$$

Mickens 等人采用谐波平衡(HB)法研究此方程<sup>[6]</sup>,求得解  $x(t) = 2\cos \sqrt{3}t$ , Yuste 等人采用椭圆函数 K-B 法也研究这个方程<sup>[5]</sup>,求得解  $x(t) = 1.9098 \operatorname{cn}(1.9098t, \sqrt{0.5})$ . 采用本文的方法,依公式(9)和(13)求得  $\omega_0 = A_0 = 1.9098, k^2 = 0.5$ . 图 2(a)和(b)分别表示当  $\epsilon = 0.1$  和  $\epsilon = 0.4$  时各种方法的计算结果. 从图 2 中可以看出,本文方法的计算结果几乎与 R-K 法的结果一致. 而 Mickens 等人的结果偏差很大. 这说明用三角函数不适宜构造方程(23)的解. Yuste 等人的结果只有当  $\epsilon = 0.1$  时才与 R-K 法的结果相符合,而当  $\epsilon = 0.4$  时就有较大的偏差. 究其原因,是因为他们所给出的解只是一阶近似解,这样的解只有当  $\epsilon$  是小参数时才正确.

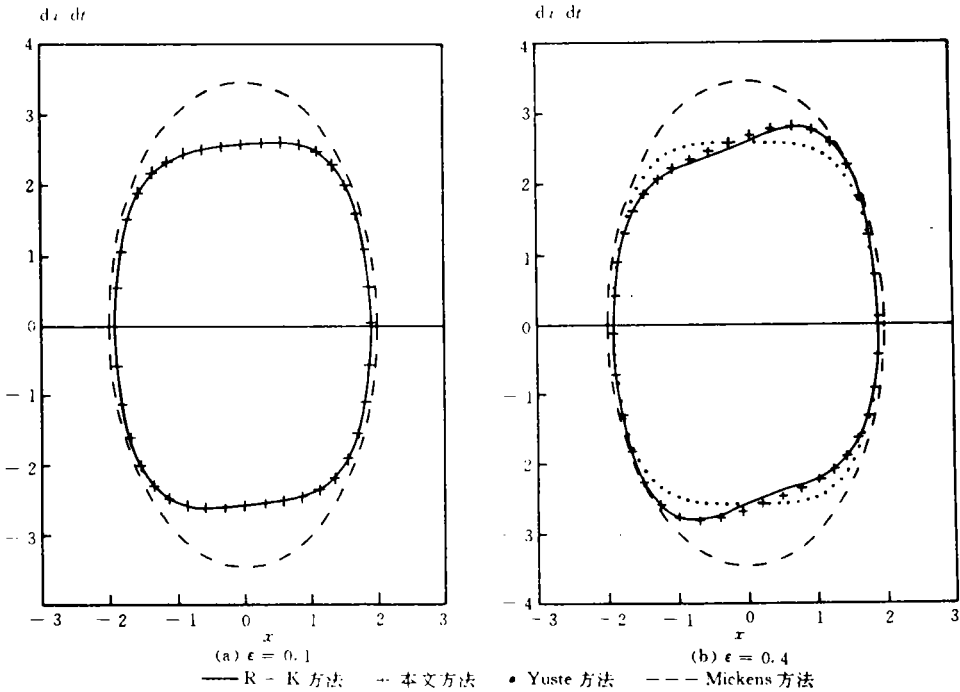


图 2 方程(23)的极限环

Fig. 2 Limit cycles of equation (23)

### 3 结 论

(1) 本文提出的椭圆函数 L-P 法是一个分析广义 Van der Pol 方程极限环的有效方法,可以将其推广到适合于其它类型的强非线性系统的极限环分析.

(2) 与其它只给出一阶近似解的椭圆函数法相比较,本文还同时给出  $x$  的一阶近似解  $x_1$ ,这就大大提高了了解的精度.

### 参 考 文 献

- 1 徐兆. 非线性力学中一种新的渐近方法. 力学学报, 1985, 17: 266~271

- 2 Xu Zhao. Nonlinear time transformation method for strong nonlinear oscillation systems. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 8;279~288
- 3 Xu Zhao, Cheung Y K. Averaging method using generalized harmonic functions for strongly non-linear oscillators. *J Sound Vib*, 1994, 174;563~576
- 4 Margallo J G, Bejarano J D, Yuste S B. Generalized Fourier series for the study of limit cycles. *J Sound Vib*, 1988, 125;13~21
- 5 Yuste S B, Bejarano J D. Construction of approximate analytical solutions to a new class of non-linear oscillator equations. *J Sound Vib*, 1986, 110;347~350
- 6 Mickens R E, Oyediji K. Construction of approximate analytical solutions to a new class of non-linear oscillator equation. *J Sound Vib*, 1985, 102;579~582

## An Elliptic Lindstedt-Poincaré Method for Limit Cycle Analysis

Chen Shuhui\*

**Abstract** An elliptic Lindstedt-Poincaré(L-P)method is presented for the limit cycle analysis of the generalized Van der Pol equations, in which the Jacobian elliptic functions are employed instead of the usual circular functions in the classical L-P perturbation procedure. The solution obtained by this method has much higher accuracy than other elliptic function methods, which gave only first order approximate solution.

**Keywords** limit cycle, elliptic functions, L-P method

### · 简 讯 ·

## 《数学生态学导论》一书出版

我校生物学系余世孝教授根据多年的教学与科研成果而编著的《数学生态学导论》一书,已于1995年8月由科学技术文献出版社出版。全书27万字,内容丰富,并具有新颖、全面、系统等特点。该书填补了我国在此领域教材的空白。

数学生态学是当代生态学领域中的一个重要分支。余世孝教授深入浅出地阐明了数学生态学原理和概念,从种群动态模型、物种生态位测度、聚类与判别分析至排序等方面,都有明确的阐述。

王班英

\* Department of Applied Mechanics, Zhongshan University, Guangzhou 510275