

Anosov 映射的一个等价条件^{*}

代 雄 平

张 军

(中山大学岭南学院, 广州 510275)

(惠州卫校)

摘 要 证明了在紧致度量空间 (X, d) 上, 开自映射 f 为具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射, 当且仅当 f 所诱导的转移自映射 $\varphi_f: X^f \rightarrow X^f$ 是具有伪轨跟踪的可扩映射.

关键词 可扩映射, 伪轨跟踪, Anosov 映射

分类号 F 58

Sakai^[1] 引进了一般紧致度量空间上的 Anosov 映射的概念, 孙文祥^[2,3] 分别证明了 Anosov 映射具有单一化拓扑稳定性和有理的 ζ -函数. 并对 Anosov 映射的拓扑熵进行了研究^[4,5]. 本文用 Anosov 映射所诱导的转移自映射来刻画其特征.

设 (X, d) 是紧致度量空间. 令 $\tilde{X} = \{x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}; x_i \in X, i \in \mathbb{Z}\}$ 并赋予度量 \tilde{d}

$$\tilde{d}(x, y) = \inf_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}}, \quad \forall x, y \in \tilde{X}$$

则 (\tilde{X}, \tilde{d}) 构成紧致度量空间. 用 $C^0(X)$ 表示 X 上全体连续满射 (带 C^0 拓扑) 形成的空间. 对于 $f \in C^0(X)$, 记 $X^f = \{x \in \tilde{X}: x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}\}$, 即 X^f 表示 f 的轨道空间. 则 $X^f \subset \tilde{X}$ 为紧致子集.

定义 1 对 $f \in C^0(X)$, 称映射 $\varphi_f: X^f \rightarrow X^f, x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty} \mapsto y = \varphi_f(x) = \{x_{i+1}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 为由 f 所诱导的转移自映射.

若 $P: X^f \rightarrow X^f, P(x) = x_0$, 则 $P \circ \varphi_f = f \circ P$, 对 $\forall \epsilon > 0, x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty} \in X^f$, 记

$$W^s(x) = \{z_0 \in X: \exists z \in X^f \text{ 使 } P(z) = z_0, d(x_n, z_n) \leq \epsilon \text{ 对 } n \geq 0\},$$

和

$$W^u(x) = \{z_0 \in X: \exists z \in X^f \text{ 使 } P(z) = z_0, d(x_{-n}, z_{-n}) \leq \epsilon \text{ 对 } n > 0\}.$$

$W^s(x)$ 和 $W^u(x)$ 分别称为 $x \in X^f$ 的局部稳定集与局部非稳定集.

定义 2^[1] 称 $f \in C^0(X)$ 为具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射, 如果对每个 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta < \epsilon$, 存在 $W(\delta) > 0$, 使得对于 $x, y \in X^f, P(x) = x_0, P(y) = y_0$, 只要 $d(x_0, y_0) < W(\delta)$ 就有

$$W^s(x) \cap W^u(y) = \{\text{恰为一个点}\}$$

定义 3 称 $f \in C^0(X)$ 是可扩的, 如果存在 $W > 0$ 使对 $x, y \in X^f, x \neq y$, 存在 $i \in \mathbb{Z}$, 满足 $d(x_i, y_i) > W$. 称 W 为可扩常数.

* 中山大学高等学术研究中心基金资助项目. 周作领教授和孙文祥先生给予指导

收稿日期: 1995-06-30 代雄平, 男, 28 岁, 1994 级博士研究生

定义 4 称 $f \in C^0(X)$ 具有伪轨跟踪性 (POTP), 如果对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一个 $W(\varepsilon) > 0$, 对 f 的任一条 W 伪轨, 能被 f 的一条轨道 X 跟踪.

引理 1^[3] $f \in C^0(X)$, 则 f 是具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射当且仅当 f 是具有 POTP 的可扩映射.

引理 2 任取定 $T > 0$, 存在 $l = \text{diam}(X)$ 及 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{i=-\infty}^{-(N+1)} \frac{l}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{l}{2^i} < \frac{2}{4}$$

引理 3 设 $f \in C^0(X)$ 是开映射, 则对任取定的 $T > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$, $\exists U > 0$, 使得当 $d(x_0, y_0) < U$ 时, 可在 X^f 中找到恰当的点 x, y , 满足 $P(x) = x_0, P(y) = y_0$ 且

$$d(x_i, y_i) < \frac{T}{8}, \quad -(N+1) \leq i \leq N+1$$

证明 $\forall x_0 \in X$. 由于 f 是满射, 故存在 $x \in X^f$, 有 $P(x) = x_0$. 令 $z = \{z_i\} = \{x_{-(N+1+i)}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$. 由于 X 是紧致度量空间, 故 f 是一致连续的, 则对 $T > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$, $\exists W > 0$, 使得当 $d(z_0, y_0') < W$ 时, 可在 X^f 中找到点 y' , 满足 $P(y') = y_0'$, 且

$$d(z_i, y_i') < T/8, \quad i \leq 2(N+1)$$

又由于 f 是开映射, 故 $f^{N+1}(B(z_0, W))$ 是包含点 $f^{N+1}(z_0) = x_0$ 的开邻域, 因此, 可取充分小的 $U > 0$, 使得 $B(x_0, U) \subset f^{N+1}(B(z_0, W))$. 显然 U 合服引理的要求.

定理 设 $f \in C^0(X)$ 是开映射. 则 f 是具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射当且仅当 f 所诱导的转移自映射 $\varphi_f: X^L \rightarrow X^f$ 是具有 POTP 的可扩映射, 即 φ_f 也是 Anosov 映射.

证明 由引理 1 知, 对 $f \in C^0(X)$, 它是具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射当且仅当 f 是具有伪轨跟踪的可扩映射. 故只需证明: f 是具有 POTP 的可扩映射当且仅当 φ_f 也是具有 POTP 的可扩映射.

定理的必要部份的证明从 [3] 定理证明的前半部份易知, 我们只证其充分性.

设 $\varphi_f: X^L \rightarrow X^f$ 是具有 POTP 的可扩映射.

(1) f 是可扩的. 不妨设 φ_f 的可扩常数为 e . 对 $x, y \in X^f$, 若 $d(x_i, y_i) \leq \frac{e}{3}, \forall i \in \mathbb{Z}$ 则

$$\tilde{d}(\varphi_f^k(x), \varphi_f^k(y)) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|i|}} d(x_{i+k}, y_{i+k}) \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \cdot \frac{e}{3} = e, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

由 φ_f 的可扩性知 $x = y$, 故 f 是可扩的, 其可扩常数为 $e/3$.

(2) f 具有 POTP. 由于 $\varphi_f: X^L \rightarrow X^f$ 具有 POTP, 所以对 $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ 使得 X^f 中任何一条 φ_f 的 T 伪轨, 可由 X^f 中的某点的 φ_f 轨道 X 跟踪. 对于 T , 取 $N \in \mathbb{N}$ 和 $U > 0$ 是分别由引理 2 和引理 3 所决定的. 令 $T' = \min\{U, T\}$.

任取 f 的一条 T' -伪轨 $\{x_0^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, 由引理 3, 我们可将其扩展为 X^f 中的一个点列 $\{\{x_0^k, i\}_{i=-\infty}^{+\infty}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$:

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \{x_0^{k-1}\} = & \{\dots, & x_0^{k-1-N+1}, & \dots, & x_0^{k-1}, & x_0^{k-1}, & x_0^{k-1}, & \dots, & x_0^{k-1}, & x_0^{k-1-N+1}, \dots\} \\ \{x_0^k\} = & \{\dots, & x_0^{k-N+1}, & \dots, & x_0^k, & x_0^k, & x_0^k, & \dots, & x_0^k, & x_0^{k-N+1}, \dots\} \\ \{x_0^{k+1}\} = & \{\dots, & x_0^{k+1-N+1}, & \dots, & x_0^{k+1}, & x_0^{k+1}, & x_0^{k+1}, & \dots, & x_0^{k+1}, & x_0^{k+1-N+1}, \dots\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

满足 $d(x_0^{k-1}, x_0^k) < \frac{T'}{8}, \quad -(N+1) \leq i \leq N+1, k \in \mathbb{Z}$

这是因为 $d(f(x_0^{k-1}), x_0^k) < U$, 故 $d(x_0^{k-1}, x_0^k) < U$. 而

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\varrho_f(x^{k-1}), x^k) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \circ d(x_0^{k-1}, x_i^k) \leq \\ &= \sum_{-N}^N \frac{d(x_0^{k-1}, x_i^k)}{2^{|i|}} + \sum_{-(N+1)}^{-\infty} 1/2^i + \sum_{N+1}^{+\infty} 1/2^i \leq \\ &= \sum_{-N}^N (1/2^{|i|}) \circ d(x_0^{k-1}, x_i^k) + \frac{T}{4} \leq \frac{3T}{8} + \frac{T}{4} < T \end{aligned}$$

进而 $(\{x_0^k\}_{k=-\infty}^{+\infty})_{k=-\infty}^{+\infty}$ 是 ϱ_f 的一条 T -伪轨. 由于 ϱ_f 是具有 POTP 知存在 $z = \{z_i\}_{i=-\infty}^{+\infty} \in X^f$, 其 ϱ_f 轨道 X -跟踪 $(\{x_0^k\}_{k=-\infty}^{+\infty})_{k=-\infty}^{+\infty}$. 则

$$\tilde{d}(\varrho_f^k(z), \{x_0^k\}_{i=-\infty}^{+\infty}) < X \quad \forall k \in \mathbf{Z},$$

即 $\sum_{-\infty}^{+\infty} d(z^{k+i}, x_i^k) / 2^{|i|} < X$

因此 $d(z^{k+0}, x_0^k) < X \quad \forall k \in \mathbf{Z}$

所以 $\{z_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in X^f$ X -跟踪 $\{x_0^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

故 f 是具有 POTP.

综合 (1) 和 (2) 得知 f 是具有 POTP 的可扩映射. 由引理 1 知 f 是具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射.

推论 1 紧致度量空间 (X, d) 上的局部同胚自映射 f 是具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射当且仅当 ϱ_f 是具有常数 $c > 0$ 的 Anosov 映射.

参 考 文 献

- 1 Sakai K. Anosov maps on closed topological manifolds. J Math Soci Japan, 1987, 39(3): 505
- 2 孙文祥. Anosov 映射的单一化拓扑稳定性. 科学通报, 1989, 34(8): 635
- 3 孙文祥. Anosov 映射的 ζ -函数. 数学年刊, 1991, 12A(4): 442-495
- 4 孙文祥. Anosov 映射的拓扑熵. 科学通报, 1991, 36(4): 258-261
- 5 代雄平. Anosov 映射的拓扑熵为零的充要条件. 科学通报, 1996, 416
- 6 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 1987

An Equivalent Condition for the Anosov Maps

Dai Xiongping* Zhang Jun

Abstract On the compact metric space (X, d) , an open map f is an Anosov map with the constant $c > 0$ if and only if the shift map $\varrho_f: X^f \rightarrow X^f$ is an expansive map with POTP.

Keywords expansive maps, pseudo-orbit tracing property, Anosov maps

* Department of Scientific Computation and Computer Application, Zhongshan University,