

光弹性 Jones 矩阵分析^{*}

陈锦安

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘要 用 Jones 矩阵运算, 以简洁统一的方式推导得到光弹性的公式.

关键词 光弹性, Jones 矩阵

分类号 O 348.1

光弹性学是应用光学技术进行应力场研究的一门力学学科分支. 在工程界这一技术应用相当广泛活跃, 有关论述都是以经典的几何光学分析方法进行的^[1~3]. 本文采用近代偏振光学理论之一的 Jones 矩阵运算, 对光弹性中的各种光学装量基本原理以简洁明了统一的方式进行分析.

入射偏振光通过一光学系统后, 出射光矢量可用一个与光学元件有关的矩阵与入射光矢量之积来描述^[4], 用这种光学变换方法, 可使偏振光通过光学元件问题的计算简化, 上述矩阵称为 Jones 矩阵. 显然此类问题之关键是求出该光学元件的 Jones 矩阵.

1 偏振器的 Jones 矩阵

一般情形下, 椭圆偏振光矢量可写成:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} \quad (1)$$

式中

$$E_x = A_x \operatorname{Re}[e^{(k W_x) i}]$$

$$E_y = A_y \operatorname{Re}[e^{(k W_y) i}] \quad (2)$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 分别表示沿 x 轴 y 轴的单位矢量, A_x, A_y 为光振幅 A 在 x, y 轴上的分量, $i = \sqrt{-1}$, W, W_y 分别为沿 x, y 轴的位相, $k = 2\pi/\lambda$, k 为角频率, λ 为光波波长.

现假定 (1) 为入射光矢量投射到光轴与 x 轴成 θ 角的线偏振器上, 如图 1, 那么通过 P 的振幅为:

$$W = E_x \cos\theta + E_y \sin\theta$$

则通过偏振器 P 的光矢量 $\mathbf{E}'$ 为: $\mathbf{E}' = E'_x \mathbf{i} + E'_y \mathbf{j}$ (3)

式中 $E'_x = E_x \cos^2\theta + E_y \sin\theta \cos\theta$, $E'_y = E_x \sin\theta \cos\theta + E_y \sin^2\theta$ (4)

考察 (1) (2) 并令:

$$\mathbf{E} = [E_x \quad E_y]^T = [A_x e^{(k W_x) i} \quad A_y e^{(k W_y) i}]^T \quad (5)$$

$\mathbf{E}$ 称为 Jones 矢量, 同时对时间因子 $e^{i\omega t}$ 一般不考虑, 则偏振光 Jones 矢量可规范化为

$$\mathbf{E} = [A_x e^{i W_x} \quad A_y e^{i W_y}]^T \quad (6)$$

* 收稿日期: 1996-03-25 陈锦安, 男, 51 岁, 高级工程师

对透过偏振器光矢量 (3), 结合 (4), 应用 Jones 矢量可写成:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{J}\mathbf{E} \quad (7)$$

$$\mathbf{E}' = [E'_x \ E'_y]^T = [A'_x e^{iW'} \ A'_y e^{iW'}]^T \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

称为偏振器的 Jones 矩阵. (7) 式表明, 从偏振器出射的光矢量可由该偏振器的 Jones 矩阵乘入射光矢量而得到. 且还可以推广到多个光学元件组成的光学系统^[4]. 设有 n 个光学元件串接构成一光学装置, 并假定这 n 个光学元件的 Jones 矩阵分别为 $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_n$. 进入第一个光学元件的偏振光矢量为 $\mathbf{E}_0$, 再依次进入其余所有光学元件, 那么从最后一个光学元件出射的光矢量 $\mathbf{E}_n$ 为:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{J}_n \circ \mathbf{J}_{n-1} \circ \dots \circ \mathbf{J}_1 \mathbf{E}_0 \quad (10)$$

2 双折射片 Jones 矩阵

给定一偏振光矢量 $\mathbf{E}$ 入射到双折射片上, 假定双折射片的快轴 f 与 ox 轴夹角为 θ , 滞后量为 W , 此时入射光矢量 $\mathbf{E}$ 在双折射片快慢轴上的分量 E_f, E_s (如图 2) 为:

$$E_f = E_x \cos\theta + E_y \sin\theta, \quad E_s = -E_x \sin\theta + E_y \cos\theta \quad (11)$$

通过双折射片后, E_f 比 E_s 快 W , 从双折射片出射光在快慢轴上的分量 E'_f, E'_s 为:

$$E'_f = E_f e^{iW}, \quad E'_s = E_s \quad (12)$$

出射光矢量为

$$\mathbf{E}' = E'_x \mathbf{i} + E'_y \mathbf{j} \quad (13)$$

式中 E'_x, E'_y 为出射光矢量在 x, y 轴上的分量, 且:

$$E'_x = (e^{iW} \cos^2\theta + \sin^2\theta) E_x + (e^{iW} - 1) \sin\theta \cos\theta E_y \quad (14)$$

$$E'_y = (e^{iW} - 1) \sin\theta \cos\theta E_x + (e^{iW} \sin^2\theta + \cos^2\theta) E_y$$

类似地, 出射光矢量 (13) 结合上式有如下形式:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{J}\mathbf{E} \quad (15)$$

这里

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} e^{iW} \cos^2\theta + \sin^2\theta & (e^{iW} - 1) \sin\theta \cos\theta \\ (e^{iW} - 1) \sin\theta \cos\theta & e^{iW} \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

为快轴与 ox 轴成 θ 角, 滞后量为 W 的双折射片的 Jones 矩阵.

3 正交平面偏振光仪

正交平面偏振光仪是光弹性进行应力分析常用装置之一, 其光学文件布置如图 3.

图 3 中, P 为光轴沿 y 轴方向的起偏振器; M 为具有瞬时双折射的受力模型; A 为光轴沿 x 轴方向的检偏振器.

经起偏振器 P 出射的偏振光矢量, 光振幅在 x 轴上分量 $A_x = 0$, 由 (6), 其 Jones 矢量为

$$\mathbf{E}_P = [0 \ A_y e^{iW_y}]^T$$

进一步作规 1 处理, 可化为:

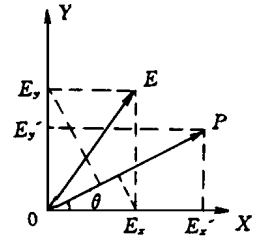


图 1 偏振器 Jones 矩阵推导示意图

Fig. 1 Schematic of derivation for Jones matrix of polarizer

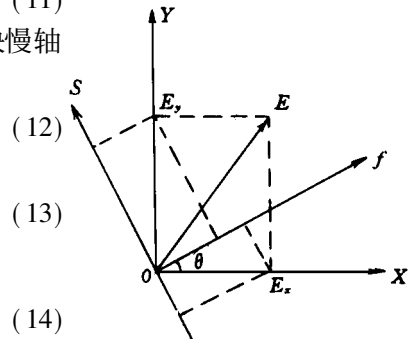


图 2 双折射片 Jones 矩阵推导示意图

Fig. 2 Schematic of derivation for matrix of birefringent plate

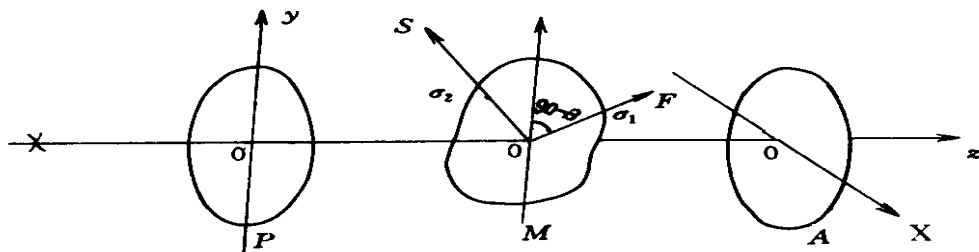


图 3 正交平面偏振光仪光学布置

Fig. 3 Optical arrangement for orthogonal plane polariscope

$$E_P = [0 \ 1]^T \quad (17)$$

此偏振光矢量垂直投射到受力模型 M , 在入射点 o 处, 将沿应力主轴方向分解成二束平面偏振光. 设 o 点处的主应力 σ_1 与 x 轴成 U 角, 并假定 σ_1 方向为快轴方向, 滞后量为 W (如图 3) 则受力模型 M 的 Jones 矩阵由 (16) 式给出:

$$J_M = \begin{bmatrix} e^{iW} \cos^2 U & \sin^2 U & (e^{iW} - 1) \sin U \cos U \\ (e^{iW} - 1) \sin U \cos U & e^{iW} \sin^2 U & \cos^2 U \end{bmatrix} \quad (18)$$

而检偏振器 A 的 Jones 矩阵由 (9) 式中的 $\theta = 0$ 时给出:

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

那么从检偏振器 A 出射的光矢量 E_A , 依据 (10) 为:

$$E_A = J_A J_M E_P \quad (20)$$

将 (19), (18), (17) 式代入得

$$E_A = [(e^{iW} - 1) \sin U \cos U] \quad (21)$$

因此光强 I 为

$$I = \tilde{E}_A E_A = \sin^2 \frac{W}{2} \sin^2 2U \quad (22)$$

式中 $\tilde{E}_A$ 为 E_A 的厄密共轭矩阵.

考察 (22) 式, 这个结果与文献 [1~3] 所分析的结果一致. 当光强 $I = 0$ 时可获得两组最基本的应力分析资料, 即由 $\sin^2(W/2)$ 一项形成的等差线及 $\sin^2 U$ 一项形成的等倾线.

4 圆偏振光仪

圆偏振光仪可在图 3 中的模型 M 两边分别加上一个 $1/4$ 波片而得到. M 左边的 $1/4$ 波片为 Q_1 右边的称为 Q_2 . 先考虑 Q_1, Q_2 快慢轴互相正交情形, 并假定 Q_1 的快轴与 x 轴成 45° 角, 此时 Q_1 的 Jones 矩阵可令 (16) 式中的 $\theta = 45^\circ, W = 90^\circ$ 而得到

$$J_{Q_1} = \frac{i+1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

同理 Q_2 的 Jones 矩阵可令 $\theta = -45^\circ, W = 90^\circ$ 得到

$$J_{Q_2} = \frac{i+1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

那么由式 (10), 从检偏镜 A 出射的光矢量

$$E_A = J_A J_{Q_2} J_M J_{Q_1} E_P \quad (25)$$

将 (18), (19), (24), (23) 和 (17) 式代入上式得

$$\mathbf{E}_A = [(\mathrm{e}^{\mathrm{i}W} - 1) \circ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2U} \quad 0]^T / 2$$

因此光强 $I = \tilde{\mathbf{E}}_A \mathbf{E}_A = \sin^2(W/2)$ (26)

再考虑 $Q_1 Q_2$ 快慢轴相互平行的情形, 并假定将 Q_2 的快轴旋转 90° 而得到. 此时从检偏振 A 出射的光矢量 $\mathbf{E}_A$ 光强 I 分别为:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{J}_A \mathbf{J}_{Q_1} \mathbf{J}_M \mathbf{J}_{Q_2} \mathbf{E}_P = [(\mathrm{e}^{\mathrm{i}W} + 1) \circ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2U} \quad 0]^T / 2$$
 (27)

$$I = \tilde{\mathbf{E}}_A \mathbf{E}_A = \cos^2(W/2)$$
 (28)

从 (26), (28) 二式可看出, 当 $I = 0$ 时只出现等差线而不出现等倾线, 为应力分析带来很大方便, 与文献 [1~ 3] 的结果也一致.

5 旋转检偏振镜法

这里仅讨论双波片法, 单波片法亦可用 Jones 矩阵运算推出同样结果. 对模型上任一测点 B , 为分析方便, 假定 B 点两个主应力方向与 x, y 轴方向一致, 若检偏振镜顺时针转过一个角度 θ (从入射光方向看) 时 B 点消光. 此时模型的 Jones 矩阵 $\mathbf{J}_M = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}W} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 而检偏振

镜 A 的 Jones 矩阵 $\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$, 那么从 A 出射的光矢量 $\mathbf{E}_A$ 为:

$$\mathbf{E}_A = \frac{(\mathrm{i} + 1)^2}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}W/2} \sin(\theta + W/2) [-\cos\theta, \sin\theta]^T$$
 (29)

光强 $I = \tilde{\mathbf{E}}_A \mathbf{E}_A = \sin^2(\theta + W/2)$ (30)

消光条件为 $\theta + W/2 = N\pi$, 此时 B 点条纹级数 $N_B = N - \theta/\pi$ (N 为整数级条纹数); 若检偏振镜是逆时针方向转一个角度 θ , 同样可推得 $N_B = (N - 1) + \theta/\pi$. 这个结果与文献 [1~ 3] 也是一致的.

参 考 文 献

- 1 Frocht M M. 光测弹性力学. 陈森译. 北京: 科学出版社, 1964. 130~ 189
- 2 Kuske A. Photoelastic stress analysis. John Wiley & Sons, 1974. 90~ 99
- 3 张如一, 陆耀楨. 实验应力分析. 北京: 机械工业出版社, 1981. 223~ 228
- 4 Jones R C. A new calculus for the treatment of optical systems. J Opt Soc Am, 1941, 31: 488
- 5 Theocaris P S, Gdoutos E E. Matrix Theory of Photoelasticity. New York, 1979. 113~ 131

Jones Matrix Analysis of Photoelastic Principle

Chen Jinan*

Abstract This paper derives a series of formulae about photo-elasticity in a simple, clear and unified manner by the means of Jones matrix calculus.

Keywords photoelasticity, Jones matrix

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275