中山大学学报 (自然科学版)
第 35卷 第 4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 35 No. 4
1996年 7月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jul. 1996

Banach空间的凸性算子*

黎 永 锦
(中山大学 数学系 ,广 州 510275)

摘 要 定义了严格凸算子和光滑算子,证明了若 T^* 是严格凸算子,则 T是光滑算子;若 T^* 是光滑算子,则 T是严格凸算子 .

关键词 严格凸算子,光滑算子,局部一致凸算子
分类号 O 177.2

文 [1]引进了一致凸算子和一致可凸算子,并对它们的性质进行了讨论 . 文 [2]引进了一致光滑算子,证明了 $T\in L(X,Y)$是一致凸算子当只仅当 T^* 是一致光滑算子 . 本文将定义严格凸算子和光滑算子,证明 T^* 是严格凸算子时 T是光滑算子; T^* 是光滑算子时 T是严格凸算子,从而建立严格凸算子和光滑算子的共轭关系 . 本文还将弱局部一致凸和强光滑等推广到算子并讨论了它们的性质及相互关系 .

1 凸算子与光滑算子的定义

定义 1[2] 算子 $T\in L(X,Y)$称为一致凸算子,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使得 $x,y\in S(X)$,且 $\|Tx-Ty\|\geqslant\varepsilon$时,有 $\|x+y\|\leqslant 2[1-\delta(\varepsilon)]$.

定义 2[2] 算子 $T\in L(X,Y)$称为一致光滑算子,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\|x\|=1$和 $\|Ty\|<\delta$时,有 $\|x+Ty\|+\|x-Ty\|<2+\varepsilon\|Ty\|$.

定义 3[2] 算子 $T\in L(X,Y)$称为局部一致凸算子,若对任意 $\varepsilon>0$和 $x\in X$, $\|x\|=1$,存在 $\delta_T(x,\varepsilon)>0$,使得当 $y\in X$, $\|y\|=1$, $\|Tx-Ty\|\geqslant\varepsilon$时,有 $\|x+y\|\leqslant 2[1-\delta_T(x,\varepsilon)]$.

定义 4 算子 $T\in L(X,Y)$称为严格凸算子,若对任意 $x,y\in S(X)$,满足 $\|(x+y)/2\|=1$时,有 $Tx=Ty$.

定义 5 算子 $T\in L(X,Y)$称为光滑算子,若对任意 $y\in S(Y)$, $f_y,f_y'\in A_y=\{f\in Y^* \mid f(y)=1=\|f\|\}$,有 $T^*f_y=T^*f_y'$.

定义 6 算子 $T\in L(X,Y)$称为非方算子,若对任意 $x,y\in S(X)$, $\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}\leqslant 1$时,有 $Ty=0$.

定义 7 算子 $T\in L(X,Y)$称为弱局部一致凸算子,若对任意 $x\in S(X)$, $x_n\in S(X)$,

* 中山大学高等学术研究中心资助项目

收稿日期: 1995-06-30 黎永锦,男,33岁,副教授

$\|(x_n+x)/2\|\longrightarrow 1$时,有 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$.

定义 8　算子 $T\in L(X,Y)$称为非常光滑算子,若对任意 $y\in Y$, $\|y\|=1$, $f_n\in S(Y^*)$, $f_n(y)\longrightarrow f_y(y)=1$时,有 $T^*f_n\xrightarrow{w}T^*f_y$.

定义 9　算子 $T\in L(X,Y)$称为强光滑算子,若对任意 $y\in Y$, $\|y\|=1$, $f_n\in S(Y^*)$,使得 $f_n(y)\longrightarrow 1=f_y(y)$时,有 $T^*f_n\longrightarrow T^*f_y$.

与 Banach空间的凸性类似,容易知道若 $T\in L(X,Y)$是一致凸算子,则 T是严格凸算子. 我们还不难证明若 X是严格凸的 Banach空间,则任意 $T\in L(X,Y)$都是严格凸算子.

2　严格凸算子和光滑算子的性质及其共轭关系

定理 1　Banach空间 X是严格凸的当且仅当任意 $f\in X^*=L(X,R)$是严格凸算子.

证明　由于 Banach空间 X是严格凸时,对任意 Banach空间 Y,任意 $T\in L(X,Y)$都是严格凸算子,因此对于 $Y=R$,任意 $f\in X^*=L(X,R)$是严格凸算子.

反之,若 $x=(y+z)/2$, $x,y,z\in S(X)$,则有 $\|(y+z)/2\|=1$,既然任意 $f\in X^*=L(X,R)$都是严格凸算子,因而 $f(y)=f(z)$对任意 $f\in X^*$成立,所以 $y=z$,从而 Banach空间 X是严格凸的.

如果 X是 Banach空间, M是 X的闭子空间, $Q: X\longrightarrow X/M$,则容易知道 Q是有界线性算子,因而有下面定理成立.

定理 2　若 X是严格凸的 Banach空间,则对 X的任意闭子空间 M, $Q: X\longrightarrow X/M$是严格凸算子.

对于算子 Q,我们还有如下的定理.

定理 3　若 M是 Banach空间 X的一个自反子空间,且 $Q: X\longrightarrow X/M$是严格凸算子,则 X/M是严格凸空间.

证明　既然 M是自反的,因此有 $Q(U(X))=U(X/M)$,故对满足 $\|(u+v)/2\|=1$的 $u,v\in S(X/M)$,有 $x,y\in U(X)$,使得 $\tilde{x}=u$, $\tilde{y}=v$,因而 $\|u\|=\|\tilde{x}\|=1$, $\|\tilde{y}\|=\|v\|=1$. 由于 $1=\|\tilde{x}\|\leqslant\|x\|\leqslant 1$, $1=\|\tilde{y}\|\leqslant\|y\|\leqslant 1$,因此 $\|x\|=1$, $\|y\|=1$,且 $1=\|(\tilde{x}+\tilde{y})/2\|\leqslant\|(x+y)/2\|\leqslant 1$,故 $\|(x+y)/2\|=1$,但 Q是严格凸算子,因而 $Qx=Qy$,从而 $\tilde{x}=u=\tilde{y}=v$,所以 X/M是严格凸空间.

由上面的两个定理,可以得到 Banach空间凸性的一个结论.

推论[4]　若 Banach空间 X是严格凸的, M是 X的一个自反子空间,则 X/M是严格凸的.

下面将证明严格凸算子和光滑算子是共轭概念.

定理 4　对于 $T\in L(X,Y)$,若 T^*是严格凸算子,则 T是光滑算子.

证明　对于 $y\in Y$, $\|y\|=1$,若存在 $f,g\in S(Y^*)$,使得 $f(y)=g(y)=1$,则 $\|(f+g)/2\|\geqslant|(f(y)+g(y))/2|=1$,故 $\|(f+g)/2\|=1$,既然 T^*是严格凸算子,因此, $T^*f=T^*g$,所以 T是光滑算子.

定理 5　对于 $T\in L(X,Y)$,若 T^*是光滑算子,则 T是严格凸算子.

证明　若 $x,y\in S(X)$,且 $\|(x+y)/2\|=1$,则有 $f\in S(X^*)$,使得 $f((x+y)/2)=1$,因而由 $|f(x)|\leqslant 1$及 $|f(y)|\leqslant 1$可知 $f(x)=f(y)=1$,故 $x(f)=y(f)=1$. 这里 x, $y\in X$

$\subset X^{**}$. 由于 T^* 是光滑的,因此 $T^{**}x = T^{**}y$,故对任意 $y\in Y^*$, $T^{**}x(g) = x(T^*g) = T^*g(x) = g(Tx)$,同样地,我们有 $T^{**}y(g) = g(Ty)$,因此 $g(Tx) = g(Ty)$,对任意 $g\in Y^*$ 成立,从而 $Tx = Ty$,所以 T 是严格凸算子.

由以上两个定理可以看出,与 Banach空间的严格凸性和光滑性类似,严格凸算子和光滑算子具有很好的共轭关系.

定理 6 若 $T\in L(X,Y)$是严格凸算子,则 T 一定是非方算子.

证明 如果 $x,y\in S(X)$,且 $\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}\leqslant 1$,则有 $x+y\in U(X)$,且 $x-y\in U(X)$,并有 $x=((x+y)+(x-y))/2$,由于 T 是严格凸算子,因此 $T(x+y)=T(x-y)$,所以 $Ty=0$,从而 T 是非方算子.

对于局部一致凸算子和弱局部一致凸算子,我们得到了它们与强光滑算子和非常光滑算子的一些关系.

定理 7 若 $T\in L(X,Y)$, T^* 是局部一致凸算子,则 T 是强光滑算子.

证明 对于任意 $y\in S(Y)$,若 $f_n\in S(Y^*)$,使得 $f_n(y)\longrightarrow f_y(y)=1$,则有 $\|(f_n+f_y)/2\|\geqslant(f_n(y)+f_y(y))/2\longrightarrow 1$,因此我们有 $\|(f_n+f_y)/2\|\longrightarrow 1$. 由于 T^* 是局部一致凸算子,因而 $T^*f_n\longrightarrow T^*f_y$,所以 T 是强光滑算子.

类似于局部一致凸算子和强光滑算子,不难证明下面定理成立.

定理 8 对于 $T\in L(X,Y)$,若 T^* 是弱局部一致凸算子,则 T 是非常光滑算子.

我们回想 Banach空间 X 具有(M)性质是指:对于任意 $x,x_n\in X$, $\|x_n\|=1$, $\|x\|=1$,若 $\|x_n+x\|\longrightarrow 2$,则 $\{x_n\}$有收敛子列. 如果 Banach空间 X 具有(M)性质,则 $T\in L(X,Y)$的严格凸性与局部一致凸性是一样的.

定理 9 若 Banach空间 X 具有(M)性质,则任意 $T\in L(X,Y)$是严格凸算子当且仅当 T 是局部一致凸算子.

证明 若 T 是局部一致凸算子,则明显地 T 是严格凸算子. 反之,若 $x\in S(X)$, $x_n\in S(X)$,且 $\|x_n+x\|\longrightarrow 2$,则由于 X 具有(M)性质,我们有 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,使得 $x_{n_k}\longrightarrow y$,故 $\|x+y\|=2$. 又由于 T 是严格凸算子,因而有 $Tx=Ty$. 因为 T 是连续线性算子,所以 $Tx_{n_k}\longrightarrow Tx=Ty$,由此可见有 $Tx_n\longrightarrow Tx$. (实际上,如果 $Tx_n\not\longrightarrow Tx$,则存在 $\varepsilon_0>0$及 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,使得 $\|Tx_{n_k}-Tx\|\geqslant\varepsilon_0$,但由上面讨论可知存在 $\{x_{n_{k_l}}\}\subset\{x_{n_k}\}$,使得 $Tx_{n_{k_l}}\longrightarrow Tx$,但这与 $\|Tx_{n_k}-Tx\|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾),所以 T 是局部一致凸的.

对于 Banach空间 X 的弱局部一致凸性,可以用 $f\in X^*$ 是局部一致凸算子来刻画.

定理 10 Banach空间 X 是弱局部一致凸的当且仅当对任意 $f\in X^*=L(X,R)$, f 是局部一致凸算子.

证明 若 Banach空间 X 是弱局一致凸的,则对任意 $x\in S(X)$, $x_n\in S(X)$, $\|(x_n+x)/2\|\longrightarrow 1$时,有 $x_n\xrightarrow{w}x$,故对任意 $f\in X^*=L(X,R)$,有 $f(x_n)\longrightarrow f(x)$,所以 f 是局部一致凸算子.

反之,若 $x\in S(X)$, $x_n\in S(X)$,且有 $\|(x_n+x)/2\|\longrightarrow 1$,则由于任意 $f\in X^*=L(X,R)$是局部一致算子,因而有 $f(x_n)\longrightarrow f(x)$,故 $x_n\xrightarrow{w}x$. 所以 Banach空间 X 是弱局部一致凸的.

参 考 文 献

1 Beauzamy B. Operateur convexificans. Seminaire Maurey-Schwartz. 1973/1974. Expose 17
2 Istratescu V. Strict convexity and complex strict convexity. Theory and Application. Dekker, New York, 1984
3 Beauzamy B. Quelques properietes des operateurs uniforment convexifiants, Studia Math. 1977, 64 211- 222
4 Diestel J. Geometry of Banach space—— Select Topics. Springer-Verlag, 1975
5 Diestel J. Sequence and series in Banach spaces. Springer-Verlag, 1984

The Convexity of Linear Operator on Banach Space

*Li Yongjin**

Abstract The strictly convex operator and smooth operator are defined, it is shown that if T^* is smooth operator, T is strictly convex operator and if T^* is strictly convex operator, T is smooth operator.

Keywords strictly convex operator, smooth operator, locally uniformly convex operator

。简 讯。

中国科学引文数据库及其引文索引

中国科学引文数据库是中国科学院文献情报中心组建的全国性数据库 .

中山大学学报 (自然科学版)是中国科学引文数据库首批收录的 315种期刊之一 .

《中国科学引文索引》印刷版和光盘版已于近日出版 . 若想了解以上两种产品的详细情况及引文数据库的服务情况 ,可与中国科学引文数据库联系 .

联系地址: 北京中关村科学院南路 8号

中科院文献情报中心中国科学引文数据库课题组

邮编: 100080 电话: 62564354 传真: 62566846

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275