中山大学学报 (自然科学版)
第36卷 第6期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 36 No. 6
1997年 11月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 1997

与平移可交换算子在 $\dot{B}_p^{T,q}$ 上的有界性[20]

邹 进
(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 主要结果是: 若与平移可交换的 Calderon-Zygmund算子 T, 其核 $K(x)$ 满足① Hörmander条件; ② $\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|K(x)|\,dx\leqslant C$; ③ 弱有界性质.则 T可连续延拓为 $\dot{B}_p^{T,q}$上的有界线性算子, $T\in R$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<q\leqslant\infty$.

关键词 Calderon-Zygmund算子, Hörmander条件, Besov空间, Triebel-Lizorkin空间
分类号 O 174.2, O 177.6

1 背景与主要结果

从 80年代 David, Journe的 $T(1)$定理[1]问世以来,人们对 Calderon-Zygmund算子的研究主要集中在两个方面.其一,有人猜想 $T(1)$定理中核的正则性条件能减弱为 Hörmander条件,这一问题至今未能解决,有关这方面工作的进展可参阅文 [2, 3];其二,将 $T(1)$定理推广到其它的函数 (分布) 空间,由于 Besov空间和 Triebel-Lizorkin空间[4]包含了许多常见的空间,因此讨论 T在这两类空间的有界性尤其重要,已有的结果表明保证 T在 $\dot{B}_p^{T,q}$和 $\dot{F}_p^{T,q}$的有界性对核的正则性要求不仅与 p, q有关,而且随着 $|T|$ 的增大正则性要求却越来越强[3, 5, 6];最近杨奇祥 颜立新 邓东皋利用小波构造了 1个算子[7],证明了 Hörmander条件并不能保证 T是 $\dot{B}_1^{0,1}$和 $\dot{F}_1^{0,2}$有界的.

设函数族 $\{h_\nu\}_{\nu\in Z}$满足条件

$$h_\nu\in \mathscr{S}(R^n) \tag{1}$$

$$\operatorname{supp}\hat{h}_\nu\subset(2^{\nu+1}\Delta\setminus 2^{\nu-1}\Delta) \tag{2}$$

其中, $\Delta=\{a\in R^n, |a_i|\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$;

$$|\partial^m\hat{h}_\nu(a)|\leqslant C_m\partial^{\nu|m|}\qquad m\in Z_+^n \tag{3}$$

$$0<C_1\leqslant\sum_\nu|\hat{h}_\nu(a)|^2\leqslant C_2<\infty\qquad a\neq 0 \tag{4}$$

当 $T\in R$, $0<p, q\leqslant\infty$,称 $f\in\mathscr{S}'/\mathscr{P}$(广义函数模去多项式) 属于齐次 Besov 空间 $\dot{B}_p^{T,q}$,如果

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{T,q}}=\{\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu T}\|h_\nu*f\|_p)^q\}^{1/q}<\infty$$

当 $T\in R$, $0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$,称 $f\in\mathscr{S}'/\mathscr{P}$属于齐次 Triebel-Lizorkin空间 $\dot{F}_p^{T,q}$,

[20] 收稿日期: 1996-12-11 邹进, 男, 35岁, 博士, 副教授

如果

$$\|f\|_{\dot F_p^{\alpha,q}} = \Big\|\Big[\sum_{\nu\in Z}(2^{\nu\alpha}|\psi_\nu * f|)^q\Big]^{1/q}\Big\|_p < \infty$$

设 T 是 $\mathscr{D}(R^n)\mapsto\mathscr{D}'(R^n)$ 的与平移可交换的线性连续算子,其分布核 $k\in\mathscr{D}'(R^n\times R^n)$ 限制在 $R^n\times R^n\setminus\{x=y\}$ 上等于一可测函数,因为 T 与平移可交换,k 在对角线以外的表现必具有形式 $k(x-y)$.

本文的主要结果是以下条件下的定理 1.

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|}|k(x-y)-k(x)|\,dx\leqslant C,\qquad y\neq 0\qquad(\text{Hörmander条件})\tag{5}$$

$$\sup_r\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|k(x)|\,dx\leqslant C\tag{6}$$

弱有界性质 (WBP) (7)

定理 1 若 T 满足条件(5)~(7),则 T 可连续延拓成 $\dot B_p^{\alpha,q}\to\dot B_p^{\alpha,q}$ 的有界线性算子,$\alpha\in R$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<q\leqslant\infty$.

注: 由于条件(5)~(7)不能推出 $|k(x)|\leqslant C/|x|^n$, $x\neq 0$ 和 $\int_{r_1\leqslant|x|\leqslant r_2}k(x)\,dx=0$,因此本文讨论的 T 不能归结为经典的奇异积分算子,它的 L^2 有界性不是明显的.

2 几个引理

引理 1 存在满足条件(1)~(4)的函数族 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in Z}$,并且具有性质:

$$\int_{[2^{-\nu}(2k+1)\pi,\,2^{-\nu}(2k+3)\pi]}\psi_\nu(x)\,dx=0,\qquad \nu,k\in Z\tag{8}$$

证明 任取非负函数 $\theta_1(\xi),\theta_2(\xi)\in\mathscr{S}(R)$, $\operatorname{supp}\theta_1\subset\{\xi\mid|\xi|\geqslant 1/2\}$,当 $9/16\leqslant\xi\leqslant 3/4$ 时,$\theta_1(\xi)\geqslant 2C>0$, $11/16\leqslant\xi\leqslant 3/4$ 时,$\theta_1(\xi)=1$;当 $\xi\in[55/64,57/64]$ 时,$\theta_2(\xi)=0$, $\xi\in[3/4,27/32]\cup[29/32,1]$ 时,$\theta_2(\xi)\geqslant 2C$, $\xi\in[3/4,13/16]\cup[15/16,1]$ 时,$\theta_2(\xi)=1$.

令
$$\theta_3(\xi)=\begin{cases}\theta_2(\xi) & \text{当}\ \dfrac{3}{4}\leqslant\xi\leqslant\dfrac{7}{8}\ \text{时};\\[2mm] \theta_2(\xi)\dfrac{\xi}{\xi+3/4} & \text{当}\ \dfrac{7}{8}\leqslant\xi\leqslant 1\ \text{时}\end{cases}.$$

$$\theta(\xi)=\begin{cases}\theta_1(\xi) & \text{当}\ 1/2\leqslant\xi\leqslant 3/4\ \text{时};\\ \theta_3(\xi) & \text{当}\ 3/4\leqslant\xi\leqslant 1\ \text{时};\\ \theta_1(\frac{7}{4}-\xi)\dfrac{\xi}{\xi+3/4} & \text{当}\ 1\leqslant\xi\leqslant 5/4\ \text{时};\\ \theta_1(\xi-\frac{3}{4})\dfrac{\xi}{\xi-3/4} & \text{当}\ 5/4\leqslant\xi\leqslant 3/2\ \text{时};\\ \theta_3(\xi-\frac{3}{4})\dfrac{\xi}{\xi-3/4} & \text{当}\ 3/2\leqslant\xi\leqslant 7/4\ \text{时};\\ \theta_1(\frac{5}{2}-\xi) & \text{当}\ 7/4\leqslant\xi\leqslant 2\ \text{时};\\ 0 & \text{当}\ \xi\in[0,1/2]\cup[2,\infty]\ \text{时};\\ \theta(-\xi) & \text{当}\ \xi<0\ \text{时};\end{cases}$$

取 $\psi(x)$ 满足 $\hat\psi(\xi)=\theta(\xi)$, $\psi_\nu(x)=2^\nu\psi(2^\nu x)$,则容易验证 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in Z}$ 满足引理 1的条件.至于高维情形,对 R^n 作拟二进分解,设 $\nu\in Z$, $k\in Z^n$,令 $P_{\nu,k}$ 是如下的拟二进方格

$$P_{\nu,k}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n:(2k_i+1)\pi<2^\nu x_i\leqslant(2k_i+3)\pi,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

记 $\theta^0(\xi)$ 为由引理 1得到的 $\theta(\xi)$,

$$\theta^1(\xi)=\begin{cases}\sum_{\nu<0}\theta(\xi)/\{\sum_j\theta_j(\xi)\} & \xi\neq 0;\\ 1 & \xi=0;\end{cases}$$

$$E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n),\varepsilon_i=0,1\}\setminus\{(1,1,\cdots,1)\}$$

令 $\theta(\xi)=\sum_{\varepsilon\in E}\theta^{\varepsilon}(\xi)=\sum_{\varepsilon\in E}\theta^{\varepsilon_1}(\xi_1)\theta^{\varepsilon_2}(\xi_2)\cdots\theta^{\varepsilon_n}(\xi_n),(\xi\in\mathbf{R}^n)$, $\psi(x)$ 由等式 $\hat{\psi}(\xi)=\theta(\xi)$ 确定,

$\psi_\nu(x)=2^{\nu}\psi(2^{\nu}x)$,容易验证如此得到的函数族 $\{\psi_\nu(x)\}_{\nu\in Z}$ 有如下性质.

引理 2 存在满足条件(1)~(4)的函数族 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in Z}$,并且 $\int_{P_{\nu,k}}\psi_\nu(x)\,dx=0,\nu\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}^n$.

为书写简便以下引理的证明均在一维情形下进行,多维的情形类似可得.

设 $\psi(x)$, $\psi_\nu(x)$ 是由引理 1得到的函数,令 $\varphi(x)$ 由等式 $\hat{\varphi}(\xi)=\hat{\psi}(\xi)/\sum_j|\hat{\psi}_j(\xi)|^2$ 确定,

$\varphi_\nu(x)=2^{\nu}\varphi(2^{\nu}x)$,则 $\{\varphi_\nu(x)\}_{\nu\in Z}$ 也满足条件(1)~(4),并且 $\sum_\nu\hat{\psi}_\nu(\xi)\hat{\varphi}_\nu(\xi)=1,\xi\neq 0$,所以 $f(\cdot)=\sum_\nu\varphi_\nu*\psi_\nu*f(\cdot)$ 在 $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$ 意义下成立.记

$$K_{\nu,\nu+l}(x)=\langle(T\psi_\nu)_y,\varphi_{\nu+l}(x-y)\rangle$$

因为 ψ_ν,φ_ν 非紧支集,从形式上看上式右端无意义,但从下面引理 3~6的证明可看出当 T 满足条件(5)~(7)时,该定义是有意义的.

任取 $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ 中的函数族 $\{\eta^m(x)\}_{m\in Z}$ 和 $\{\rho^m(x)\}_{m\in Z}$,它们满足 $\operatorname{supp}\eta^m\subset[m-1/2,m+1]$, $\sum_m\eta^m(x)=1$, $\eta^m(x)\geqslant 0$, $\|\eta^m\|_\infty\leqslant C$, $\|(\eta^m)'\|_\infty\leqslant C$; $\operatorname{supp}\rho^m\subset[m-2,m+5/2]$,当 $x\in[m-3/2,m+2]$ 时, $\rho^m(x)=1$, $\rho^m(x)\geqslant 0$, $\|\rho^m\|_\infty\leqslant C$, $\|(\rho^m)'\|_\infty\leqslant C$,令 $\rho_\nu^m(x)=\rho^m(2^{\nu}x)$, $\eta_\nu^m(x)=\eta_m(2^{\nu}x)$,容易验证: $\|(\eta_\nu^m)'\|_\infty\leqslant C2^{\nu}$, $\|(\rho_\nu^m)'\|_\infty\leqslant C2^{\nu}$,并且

$$\sum_m\eta_\nu^m(x)\rho_\nu^m(x)=1\quad 当 |x-y|\leqslant 2^{-\nu} 时$$

$$\operatorname{supp}\sum_m\eta_\nu^m(x)\rho_\nu^m(y)\subset\{(x,y):|x-y|\leqslant 3\times 2^{-\nu}\};$$

$$\Big|\sum_m\eta_\nu^m(x)\rho_\nu^m(y)\Big|\leqslant C\quad 当 |x-y|\leqslant 3\times 2^{-\nu} 时$$

作分解

$$\begin{aligned}K_{\nu,\nu+l}(x)=\;&k_{\nu,\nu+l}(x)\chi_{\{|x|\leqslant 2^{-\nu}\}}(x)+\\&\sum_m\langle(T(\eta_\nu^m\psi_\nu))_y,\rho_\nu^m(y)\varphi_{\nu+l}(x-y)\rangle\chi_{\{|x|>2^{-\nu}\}}(x)+\\&\iint_{2^{-\nu}\leqslant|y-z|\leqslant 16\pi 2^{-\nu}}\varphi_{\nu+l}(x-y)k(y-z)\Big(1-\sum_m\eta_\nu^m(z)\rho_\nu^m(y)\Big)\psi_\nu(z)\,dz\,dy\,\chi_{\{|x|>2^{-\nu}\}}(x)+\\&\iint_{|y-z|\geqslant 16\pi 2^{-\nu}}\varphi_{\nu+l}(x-y)k(y-z)\psi_\nu(z)\,dz\,dy\,\chi_{\{|x|>2^{-\nu}\}}(x)\end{aligned}$$

引理 3 若 T 满足条件(7),则当 $|x|\leqslant 2^{-\nu}$ 时,

$$|K_{\nu,\nu+l}(x)|\leqslant C2^{\nu}\qquad l=-1,0,1,\nu\in\mathbf{Z}$$

证明 因为 $\psi,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R})$,所以存在 $C>0$ 使得 $|\psi^{(j)}(x)|\leqslant 1/(1+|x|)^4$, $|\varphi^{(j)}(x)|\leqslant C/(1+|x|)^4,j=0,1$.

任取函数族 $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$,满足 $\zeta_i\in\mathscr{S}(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp}\zeta_0\subset\{x:|x|\leqslant 2^{-\nu}\}$, $\operatorname{supp}\zeta_i\subset\{x: 2^{-\nu+i-2}\leqslant|x|\leqslant 2^{-\nu+i}\}$, $\|\zeta_i\|_\infty\leqslant C$, $\|\zeta_i'\|_\infty\leqslant C2^{\nu-i}$, $\sum_{i=0}^{\infty}\zeta_i(x)\equiv 1$,这里 C 与 ν, i 无关,于是当 $|x|\leqslant 2^{-\nu}$ 时由条件(7)可得:

$$
\begin{aligned}
|k_{\nu,\nu+l}(x)| &= \Big|\sum_{i,j=0}^{\infty}\langle T(\zeta_i\varphi_\nu),\zeta_j(x-\cdot)\psi_{\nu+l}(x-\cdot)\rangle\Big|\leqslant\\
&C\sum_{i,j=0}^{\infty}2^{-\nu+\max(i,j)}(\|\zeta_i\varphi_\nu\|_\infty+2^{-\nu+\max(i,j)}\|(\zeta_i\varphi_\nu)'\|_\infty)\cdot\\
&(\|\zeta_j(x-\cdot)\psi_{\nu+l}(x-\cdot)\|_\infty+2^{-\nu+\max(i,j)}\|(\zeta_j(x-\cdot)\psi_{\nu+l}(x-\cdot))'\|_\infty)\leqslant\\
&C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}2^{-\nu+j}\left(\frac{2^{\nu}+2^{j-\nu}(2^{\nu-i}2^{\nu}+2^{2\nu})}{(1+2^{j})^4}\right)\left(\frac{2^{\nu}+2^{j-\nu}(2^{\nu-i}2^{\nu}+2^{2\nu})}{(1+2^{j})^4}\right)\leqslant\\
&C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}2^{\nu}\frac{1}{(1+2^{j})^4}\frac{2^{3j}}{(1+2^{j})^4}\leqslant C2^{\nu}
\end{aligned}
$$

引理 4　若 T 满足条件(7),则对任何 $\lambda>1$,存在 $C_\lambda>0$,使当 $|x|>2^{-\nu}$ 时有

$$
\Big|\sum_m\langle(T(\tau_\nu^m\varphi_\nu))_y,\eta_\nu^m(y)\psi_{\nu+l}(x-y)\rangle\Big|\leqslant C_\lambda\frac{2^{(1-\lambda)\nu}}{|x|^\lambda}
$$

证明　因为 $|\varphi_\nu^{(j)}(x)|\leqslant\dfrac{C_\lambda}{(1+|x|)^\lambda}$, $|\psi^{(j)}(x)|\leqslant\dfrac{C_\lambda}{(1+|x|)^\lambda}$, $(j=0,1)$,又当 $|x|>2^{-\nu}$,取 $i\geqslant 0$ 满足 $2^{-\nu+i}<|x|\leqslant 2^{-\nu+i+1}$,由条件(7)可得

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_m\langle(T(\tau_\nu^m\varphi_\nu))_y,\eta_\nu^m(y)\psi_{\nu+l}(x-y)\rangle\Big|\leqslant\\
&C\sum_m 2^{-\nu}(\|\tau_\nu^m\varphi_\nu\|_\infty+2^{-\nu}\|(a_\nu^m\varphi_\nu)'\|_\infty)(\|\eta_\nu(\cdot)\psi_{\nu+l}(x-\cdot)\|_\infty+\\
&2^{-\nu}\|(\eta_\nu(\cdot)\psi_{\nu+l}(x-\cdot))'\|_\infty)\leqslant\\
&C_\lambda\sum_m 2^{-\nu}\left(\frac{2^{\nu}+2^{-\nu}(2^{2\nu}+2^{2\nu})}{(1+|m|)^\lambda}\right)\left(\frac{2^{\nu}+2^{-\nu}(2^{2\nu}+2^{2\nu})}{(1+2^{\nu}|x-2^{-\nu}m|)^\lambda}\right)\leqslant\\
&C_\lambda 2^{\nu}\sum_m\frac{1}{(1+|m|)^\lambda}\frac{1}{(1+|2^{i}-m|)^\lambda}\leqslant C_\lambda 2^{\nu}\frac{1}{2^{i\lambda}}\leqslant C_\lambda 2^{(1-\lambda)\nu}\frac{1}{|x|^\lambda}
\end{aligned}
$$

引理 5　若 T 满足条件(6),则

$$
\int\Big|\iint_{2^{-\nu}\leqslant|y-z|\leqslant 16\pi 2^{-\nu}}\psi_{\nu+l}(x-y)K(y-z)\Big(1-\sum_m\tau_\nu^m(z)\eta_\nu^m(y)\Big)\varphi_\nu(z)\,dz\,dy\Big|\,dx
$$

$$
\leqslant C,
$$

$$
l=-1,0,1
$$

引理 6　若 T 满足条件(5),(6)则

$$
\int\Big|\iint_{|y-z|\geqslant 16\pi 2^{-\nu}}\varphi_{\nu+l}(x-y)K(y-z)\varphi_\nu(z)\,dz\,dy\Big|\,dx\leqslant C,\quad l=-1,0,1
$$

证明　原式 $=\displaystyle\int\Big|\iint\psi_{\nu+l}(x-y)K(y-z)\,I_{\{|y-z|\geqslant 16\pi\cdot 2^{-\nu}\}}\varphi_\nu(z)\,dz\,dy\Big|\,dx\leqslant$

$$
\begin{aligned}
&\int\Big|\iint\psi_{\nu+l}(x-y)\,dy\Big[\sum_k\int_{(2k+1)4\pi 2^{-\nu}}^{(2k+3)4\pi 2^{-\nu}}[K(y-z)-K(y-(2k+1)4\pi 2^{-\nu})]\Big]\cdot\\
&I_{\{|y-z|\geqslant 16\pi 2^{-\nu}\}}\varphi_\nu(z)\,dz\Big|\,dx+\\
&2\iiint_{16\pi 2^{-\nu}\leqslant|y-z|\leqslant 24\pi 2^{-\nu}}|\psi_{\nu+l}(x-y)k(y-z)\varphi_\nu(z)|\,dz\,dy\,dx\leqslant
\end{aligned}
$$

$$\sum_k \int_{(2k+1)\pi 2^{-\nu}}^{(2k+3)\pi 2^{-\nu}} |\psi_\nu(z)|\,\mathrm{d}z \int_{|y-z|\geq 16\pi 2^{-\nu}} |K(y-z)-K(y-(2k+1)\pi 2^{-\nu})|\,\mathrm{d}y \cdot$$
$$\int |\varphi_{\nu+l}(x-y)|\,\mathrm{d}x + C \leq C$$

综合引理 3~ 6的结果即得下面引理 7.

引理 7 若 T满足条件(5)~(7),则
$$\int |K_{\nu,\nu+l}(x)|\,\mathrm{d}x \leq C \quad l=-1,0,1;\nu\in\mathbb{Z}$$

3 主要定理的证明

引理 8 若 T满足条件(6),(7),则 T是$\mathscr{S}(\mathbb{R})$到$\mathscr{S}'(\mathbb{R})$中的线性连续算子.

定理 1的证明 对任何 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$,由引理 8知 $Tf\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,所以 $Tf(\cdot)=\sum_\nu \varphi_\nu * \psi_\nu * (Tf)(\cdot)$在$\mathscr{S}'/\mathscr{P}$意义下成立.

注意到,$\varphi_m,\psi_m\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\cap\{\psi: D^\alpha\hat{\psi}(0)=0,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\}$,所以在点态意义下有
$$\psi_m*(Tf)(x)=\sum_\nu(\psi_m*\varphi_\nu*\psi_\nu*(Tf))(x)=$$
$$\sum_{l=-1}^{1}(\psi_m*\varphi_{m+l}*\psi_{m+l}*(Tf))(x)=$$
$$\sum_{l=-1}^{1}(\varphi_{m+l}*(T\psi_{m+l}))*(\psi_m*f)(x)$$

因此
$$\|\psi_m*(Tf)\|_p\leq\sum_{l=-1}^{1}\|(\varphi_{m+l}*(T\psi_{m+l}))*(\psi_m*f)\|_p\leq$$
$$\sum_{l=-1}^{1}\|K_{m+l,m+l}(x)\|_1\|\psi_m*f\|_p\leq C\|\psi_m*f\|_p$$

故
$$\|Tf\|_{B_p^{\alpha,q}}\leq C\|f\|_{B_p^{\alpha,q}} \qquad \alpha\in\mathbb{R},\ 1\leq p\leq\infty,\ 0<q\leq\infty$$

令 $Q_{\nu,k}$为二进方格,$Q_{\nu,k}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, k_i\leq 2^\nu x_i\leq k_i+1, i=1,2,\cdots,n\}$,$x_{\nu,k}=2^{-\nu}k$,$k\in\mathbb{Z}^n$,$\nu\in\mathbb{Z}$,则在$\mathscr{S}'/\mathscr{P}$意义下有离散分解[7] $f(\cdot)=\sum_Q\langle f,\varphi_Q\rangle\psi_Q(\cdot)$

其中,$\varphi_Q(x)=2^{-\frac{n\nu}{2}}\varphi(2^\nu x-k)=2^{-\frac{n\nu}{2}}\varphi_\nu(x-x_Q)$, $\psi_Q(x)=2^{-\frac{n\nu}{2}}\psi_\nu(x-x_Q)$,并且当 $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<p<\infty$, $0<q\leq\infty$时有
$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}}\approx\Big\|\Big[\sum_Q(|Q|^{-\frac{\alpha}{n}}|\langle f,\varphi_Q\rangle|\tilde{\chi}_Q)^q\Big]^{1/q}\Big\|_p$$

这里,$\tilde{\chi}_Q(x)=|Q|^{-1/2}\chi_Q(x)$.

若将 Hörmander条件(5)换为下面的标准核条件
$$|K(x-y)-K(x)|\leq C\frac{|y|^r}{|x|^{n+r}},\text{当 } 0<|y|\leq\frac{1}{2}|x| \text{ 时},0<r\leq 1$$

则利用标准核条件适当修改上节引理的证明即可得到下面的逐点估计.

引理 9 若 T满足标准核条件和(6),(7)式,则
$$|K_{\nu,\nu+l}(x)|\leq\frac{C2^{n\nu}}{(1+2^\nu|x|)^{n+r}} \qquad l=-1,0,1,\nu\in\mathbb{Z}$$

所以:
$$|\langle T\psi_{\nu,k},\varphi_{\nu',k'}\rangle|\begin{cases}=0 & \text{当 } |\nu-\nu'|>1\text{时};\\ \leq\dfrac{C}{(1+|k-k'|)^{n+r}} & \text{当 } |\nu-\nu'|\leq 1\text{时}\end{cases}$$

上式说明矩阵 $\{\langle T h_{Q,k}, h_{Q',k'}\rangle\}$ 是几乎对角化的[8] ,从而有下面结果 .

定理 2　上述 T可连续延拓为 $\dot{F}_p^{\alpha,q}$上的有界线性算子 , $\forall \alpha \in R$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

致谢　本文得到导师邓东皋教授的指导 ,在此表示衷心感谢!

参 考 文 献

1 David G, Journe J L. A boundedness criterion for generalized Calderon-Zygmund operators. Ann of Math, 1984, 120: 371～ 397

2 Meyer Y. La minimalite de le espace de Besov $\dot{B}_1^{0,1}$ et la continuite de operateurs definis par des imteqrales singulieres. Monografias de Matematicas, Univ Autonoma de Madrid.

3 Han Y S, Hofmann S. $T_{(1)}$ theorems for Besov and Triebel-Lizorkin spaces. Tran Amer Math Soc, 1993, 237(2): 839～ 853

4 Triebel H. Theory of function spaces, Monographs in Mathematics. Basel: Birkhauser Verlag, 1983. 1～ 284

5 Lemarie P G. Continuite sur les espaces de Besov des operateurs definis par des integrales singuliers. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1985, 35: 175～ 187

6 Frazier M, Torres R, Weiss G. The boundedness of Calderon-Zygmund operators on the spaces $\dot{F}_p^{\alpha,q}$. Rev Mat Iberoamericana, 1988(4): 41～ 72

7 杨奇祥 ,颜立新 ,邓东皋 .关于 Hörmander条件 .科学通报 , 1997, 42(10): 1034～ 1038

8 Frazier M, Jawerth B. A discrete transform and decompositions of distribution. Jour of Fun Analysis, 1990, 93: 34～ 170

The Boundedness of Translation Invariant Operators on the Spaces $\dot{B}_p^{\alpha,q}$

*Zou Jin**

Abstract　The main result of this paper is : Suppose that T is a translation invariant Calderon-Zygmund operator with the kernel $K(x)$ satisfying① Hörmander condition; ② the inequality $\int_{r \leqslant |x| \leqslant 2r} |K(x)| \, dx \leqslant C$; the weak boundedness property. Then T can be continuously extended as a bounded linear operator on $\dot{B}_p^{\alpha,q}$, where, $\forall \alpha \in R$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$.

Keywords　Calderon-Zygmund operator, Hörmander condition, Besov spaces, Triebel-Lizorkin spaces

*　Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275