第36卷 第6期 1997年 11月
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 36 No. 6 Nov. 1997

不带凸条件双曲守恒律熵解渐近行为[20]

叶 小 平
(中山大学数学系,广州 510275)

摘 要 讨论了非凸双曲守恒律熵解的大时间渐近问题.若初值当$|x|$充分大时为接触间断的 Riemann 数据时,熵解逼近相应 Rieman问题解;当初值有紧支时,熵解以代数数率收敛于零.

关键词 接触间断,后向特征,渐近行为
分类号 O 175.29

设有双曲守恒律初值问题

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \qquad (x,t)\in R\times R^+ \tag{1}$$

本文假设 $f(u)$满足

$$f(u)\text{是光滑的奇函数}^{[注1]} \tag{2}$$

$$f'(u)>0,\ f''(u)\cdot u>0 \qquad u\neq 0 \tag{3}$$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0 \tag{4}$$

由条件知 $f(u)$以 $u=0$为唯一拐点.而 $u(x,t)$为(1)式满足 R-H条件和 E条件(定义见后)的分片光滑解.在 $f(u)$为凸时(1)式熵解渐近性质的主要结果见文[1,2].

若 $f(u)$非凸,(1)式解渐近行为的讨论多限制在 $f(u)$只有一个拐点的情形;同时还可能要求 $f(u)$具有某些较为特殊的性质[3,4].这样做无非是试图将非凸带来的较大困难予以适当化解,并为研究更为一般的情况作必要的准备.

为着讨论的需要引入下面概念.

定义1 (前向广义特征).上半平面 Lipschitz曲线 $x=x(t)$称为(1)式的前向(广义)特征.

其中
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{cases} f'(u(x(t),t)) & u_+=u_- \\ e(u_-,u_+) & u_+\neq u_- \end{cases}$$

而
$$u_-=u(x^-(t),t),\quad u_+=u(x^+(t),t)$$

这里 $e(u_-,u_+)$满足

1) Rankine-Hygoniot条件(R-H条件)

$$e(u_-,u_+)=\frac{f(u_-)-f(u_+)}{u_--u_+}$$

2) 熵条件(E条件): $\lambda_+=f'(u_+)\leqslant e(u_+,u_-)<f'(u_-)=\lambda_-$.

⒇ 收稿日期: 1997-05-05 叶小平,男,4岁,讲师

注1] $f(u)$为奇函数仅是为论述简便,若设 $f(u)$仅光滑且满足(3),(4),相关结果也成立

定义 2 (后向广义特征). 对上半平面点 (x, t), 以过该点左特征为后行线. 若后行中碰右接触间断, 以交点处的左特征继续后行.

定理 1 设 $u_0(x)$ 满足: ① 在实数轴 R 上有界可测; ② 存在 $X>0$, 使有

$$u_0(x)=\begin{cases} u_l & (x\leqslant -X) \\ u_r & (x\geqslant X)\end{cases}$$

且 $$\lambda_r = f'(u_r) < f'(u_l) = \lambda_l$$

又设 u_l^* 是过 $(u_l, f(u))$ 向 $w = f(u)$ 的图像所做切线的切点横坐标 $(u_l \neq u_l^*)$, 则有以下结论:

存在 $t_0>0$, 当 $t>t_0$ 时 (为确定计不妨设有 $u_l>0, u_r<0$), (1)式的解 $u(x,t)$ 有下列形式

1) 若 $u_l^* \leqslant u_r < u_l$, 则

$$u(x,t)=\begin{cases} u_l & x\leqslant x_0 + e t \\ u_l & x\geqslant x_0 + e t\end{cases}$$

其中, $e = e(u_l, u_r)$.

而 $$x_0 = \frac{1}{u_r - u_l}\int_{-N}^{N}\left[\frac{u_r+u_l}{2} - u_0(x)\right]\mathrm{d}x \quad (N > X)$$

2) 若 $-u_l < u_r < u_l^*$, 则

$$u(x,t)=\begin{cases} u_l & x\leqslant x_0 + \lambda_l^*(t-t_0) \\ u\left(\dfrac{x-x_0}{t-t_0}\right) & x_0+\lambda_l^*(t-t_0) < x < x_0 + \lambda_r(t-t_0) \\ u_r & x\geqslant x_0+\lambda_r(t-t_0)\end{cases}$$

其中, $x_0 = x_l(t_0) = x_r(t_0)$ (x_l, x_r 定义见下), $\lambda_l^* = f'(u_l^*)$.

证明 过 $(-X, 0)$, $(X, 0)$ 分别做前向特征 $x_l(t)$, $x_r(t)$ 不失一般性仅讨论 $x_l(t)$ 为接触间断, 此时易知 $x_l(t)$ 为直线.

给定 $T>0$, 过 $(x_l^+(T), T)$, $(x_r^-(T), T)$ 分别做后向特征 $x_+(t)$, $x_-(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

设 $D(T) = x_r(T) - x_l(T)$, 则 $D'(T) = x'_r(T) - x'_l(T) = e(u_-, u_r) - e(u_l, u_+)$

这里, $u_+ = u(x_l^+(T), T)$, $u_- = u(x_r^-(T), T)$ 由 E 条件得

$$\lambda_r - \lambda_l < e(u_-, u_r) - e(u_l, u_+) < \lambda^- - \lambda^+ \text{ 其中, } \lambda^{\pm} = f'(u_\pm)$$

这样存在 $\theta\in(0,1)$ 成立

$$D'(T) = \theta(\lambda^- - \lambda^+) + (1-\theta)(\lambda_r - \lambda_l) \tag{5}$$

设 T_1 为沿 x^- 后行首次与右接触间断相遇的时刻, 则有

$$D(T) = x^-(T) - x^+(T) = (\lambda^- - \lambda^+)(T - T_1) + D(T_1) \tag{6}$$

更设 $T_2, \cdots, T_n$ 为沿 x^- 后行依次与接触间断相碰而到 x 轴的时刻, 由(6)式可得

$$\begin{aligned} D(T) = {} & (\lambda^- - \lambda^+)(T - T_1) + (\lambda_1^- - \lambda_1^+)(T_1 - T_2) + \\ & \cdots + (\lambda_n^- - \lambda_n^+)(T_n - 0) + D(0) \end{aligned} \tag{7}$$

但是 $\lambda_i^+ = \lambda^+$, $\lambda^- < \lambda_i^- < \lambda_{i+1}^-$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

再由后向特征的唯一性知 $D(0) > 0$.

所以由(7)式得: $D(T) \geqslant (\lambda^- - \lambda^+)T$ 代入(5)即有

$$D'(T) \leqslant \frac{\theta}{T}D(T) + (1-\theta)(\lambda_r - \lambda_l)$$

从而

$$D(T) \leqslant [D(1) - (\lambda_r - \lambda_1)]T^{\theta} + (\lambda_r - \lambda_l)T \tag{8}$$

注意到 $\lambda_l = f'(u_l) > f'(u_r) = \lambda_r$ 以及 $D(T) \geqslant 0$.由(8)即知存在 $t_0 > 0$.使有 $D(t_0) = 0$,即此时产生一个由左状态 u_l 和右状态 u_r 决定的 Riemann问题.

在 1)的情形下设

$$T(t) = \int_{-\infty}^{N+et} (u(x,t) - u_l)\,\mathrm{d}x \qquad (N > x)$$

则

$$T'(t) = \int_{-\infty}^{N+et} u_t\,\mathrm{d}x + (u(N+et,t) - u_l)e =$$

$$-\{f(u(N+et,t)) - f(u(-\infty,t))\} + (u(N+et,t) - u_l)e$$

取 N 充分大可知 $T'(t) = -\{f(u_r) - f(u_l)\} + (u_r - u_l)e = 0$注意到对充分大的 $t > t_0$,成立

$$T(t) = (u_r - u_l)(N - x_0)$$

而 $T(0) = \int_{-N}^{N}(u_0(x) - u_l)\,\mathrm{d}x$ 由 $T(t) = T(0)$即得

$$(u_r - u_l)(N - x_0) = \int_{-N}^{N}(u_0(x) - u_l)\,\mathrm{d}x$$

解出 x_0得

$$x_0 = \frac{1}{u_r - u_l}\int_{-N}^{N}\{\frac{1}{2}(u_r - u_l) - (u_0(x) - u_l)\}\mathrm{d}x$$

定理 2　设 $f(u)$还满足存在自然数 $k(k > \frac{1}{2}[e^{\|u_o\|_\infty} - 1])$使有 $f^{(i)}_{(0)} = 0(i = 1, 2, \cdots, 2k)$,且

$$f^{(2k+1)}(0) > \max_{n=0,1,2\cdots} |f^{(2k+1+n)}(0)| > 0 \tag{9}$$

$f(u)$在 $u = 0$可展为 Taylor级数

$$f(u) = bu^{2k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2k+1+n)}(0)}{(2k+1+n)!}u^{2k+1+n} \tag{10}$$

其中,$b = f^{(2k+1)}(0)/(2k+1)!$.

又设 $u_0(x)$满足 $\mathrm{supp}\,u_0(x) = [0,X]$($X$为正常数),则 t充分大时(1)式的解 $u(x,t)$满足

$|u(x,t)| \leqslant c(x,f,u_0)t^{-\frac{1}{2k}}$.其中,$c(x,u_0,f)$为仅与 x,u_0,f有关的正常数.

证明　分别过(0,0)和(0,X)做前向特征 $x_l(t), x_r(t)$,由 $f'(u) \geqslant 0$和 E条件可得

$$\mathrm{d}x_l(t)/\mathrm{d}t = 0$$

由 R-H条件和(10)式知

$$e(u_-, u_r) = e(u_-, 0) = \frac{f(u_-)}{u_-} =$$

$$\frac{1}{2k+1}f'(u_-) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-nf^{(2k+1+n)}(0)}{(2k+1+n)!\,(2k+1)}u_-^{2k+1} \tag{11}$$

而 $x_l(t)$为 t轴,故对任意给定 $t > 0$和 $x \in [x_l(t), x_r(t)]$成立

$$f'(u(x,t)) = \lambda(u(x,t)) \leqslant \frac{x(t)}{t} \leqslant \frac{x_r(t)}{t} \tag{12}$$

特别有　$f'(u_-) = \lambda(u_-) \leqslant \frac{x_r(t)}{t}$

由上式和(11)式可得

$$\frac{\mathrm{d}x_r(t)}{\mathrm{d}t} = e(u_-, u_r) = \frac{f'(u_-)}{2k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-nf^{(2k+1+n)}(0)}{(2k+1+n)!\,(2k+1)}u_-^{2k+n} \leqslant$$

$$\frac{1}{2k+1}\frac{x_r(t)}{t}+c_0 \qquad (13)$$

其中, $c_0=\sup_{|u|\leqslant\|u_0\|_\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n f^{(2k+1+n)}(0)}{(2k+1+n)!(2k+1)}u^{2k+n}\right|$

由(10)式在$\{|u|\leqslant\|u_0\|_\infty\}$内一致收敛易知 $c_0<+\infty$. 由(13)式解得

$$x_r(t)\leqslant\left(\frac{t}{\text{f}}\right)^{\frac{1}{2k+1}}\{x_r(\text{f})+\text{f}(1+\frac{1}{2k})(1-\left(\frac{t}{\text{f}}\right)^{-\frac{2k}{2k+1}}\cdot c_0\}$$

其中, $\text{f}=(X\cdot\|u_0\|_\infty)^{-(2k+1)}$,而 $t>\text{f}$.

此外, $x_r(\text{f})=\frac{\mathrm{d}x_r(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=\text{f}}\text{f}+X\leqslant\frac{X}{\text{f}}\cdot\text{f}+X=2X$ 从而

$$x_r(t)\leqslant t^{\frac{1}{2k+1}}(X\|u_0\|_\infty)^{-1}(2X+(X\|u_0\|_\infty)^{-(2k+1)}c_0) \qquad (14)$$

由(10)得到 $$f'(u)=b(2k+1)u^{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(2k+1+n)}(0)}{(2k+n)!}u^{2k+n}$$

再由(9)可得

$$b(2k+1-\mathrm{e}^{\|u_0\|_\infty})u^{2k}\leqslant f'(u)$$

由上式以及(12),(14)式即得

$$b(2k+1-\mathrm{e}^{\|u_0\|_\infty})u^{2k}\leqslant\frac{x_r(t)}{t}\leqslant t^{-\frac{2k}{2k+1}}(X\cdot\|u_0\|_\infty)2(X+(X\|u_0\|_\infty)^{-(2k+1)}c_0)$$

所以 $$|u|\leqslant c(x,f,\|u_0\|_\infty)t^{-\frac{1}{2k+1}}.$$

参 考 文 献

1 Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York. Springer-Verlag, 1995. 291~301

2 Liu T P. Invariants and asymptotic behavior of solutions of a conservation law. Proc Amer Math Soc, 1978, 71(2): 227~231

3 Lyberopoulos A N. Large-time structure of solutions of scalar conservations laws without convexity in the presence of a linear source field J Diff Equs, 1992, 99: 342~380

4 Brian, Hayes T. Stability of solutions to a destabilized Hopf equation. Common Pure Appl Math, 1995, 48: 157~166

Asymptotic Behavior of Entropy Solutions of Scalar Conservation Laws without Convexity

Ye Xiaoping *

Abstract The large-time asymptotic behavior of solutions of non-convex conservation laws is studied here. It is shown that if the initial data are just Riemann data of shock waves or contact discontinuities, the solution approaches that of the corresponding Riemann problem, and when the initial data have a compact support set, the solution converges to zero at an algebraic rate.

Keywords contact discontinuity, backward characteristic, asymtotic behavior

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275