

一维修正 Poschl-Teller型势的 Dirac方程的束缚态

陈昌远

孙国耀

(江苏盐城师范专科学校物理学系,盐城 310000) (中山大学物理学系)

摘 要 在标量型和矢量型修正 Poschl-Teller势相等的条件下,给出了 Dirac方程束缚态的一维二分量波函数和一维四分量波函数的精确解.研究了标量势大于矢量势时 Dirac方程的退耦问题.

关键词 Poschl-Teller势,Dirac方程,精确解

分类号 O 413.1

在强耦合条件下,粒子的相对论效应变得很重要^[1].具有一维线性型势的 Dirac方程的束缚态解已有广泛的讨论^[2],但是关于一维非线性型势的 Dirac方程束缚态的讨论并不多见.此外,Dirac方程在何种条件下可求得束缚态精确解,它和 Schrodinger方程的精确解有何关系,这些人们感兴趣的问题也未见有报道.本文通过求解一维修正 Poschl-Teller型势的 Dirac方程的束缚态精确解试图对上述问题做出明确的回答.

修正 Poschl-Teller势(简记为修正 PT势)是一种双原子分子模型势的吸引部分,当其中的参数取自然数时,平面波经此势阱不发生反射,所以也称为无反射势,它在 KdV孤子理论等问题的研究中也起着重要的作用.最近,人们通过对修正 PT势的 Schrodinger方程做自变量双曲函数变换的方法,求得了此方程的精确解^[3,4].本文讨论这一势场的 Dirac方程束缚态解.

1 一维二分量波函数

记一维标量型和矢量型的修正 PT势分别为

$$S(x) = -[\lambda_s(\lambda_s + 1)/2M]\operatorname{sech}^2 x, \quad V(x) = -[\lambda_v(\lambda_v + 1)/2M]\operatorname{sech}^2 x \\ (\lambda_s > 0, \lambda_v > 0) \quad (1)$$

一维二分量波函数由 Dirac方程

$$\left[-i\epsilon_2 \frac{d}{dx} + (M + S)\epsilon_1\right] \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (E - V) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (2)$$

的精确解给出,其中 $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. (2)式即

$$\begin{aligned} f' + (M + S)f &= (E - V)g \\ -g' + (M + S)g &= (E - V)f \end{aligned} \quad (3)$$

或者

$$\begin{aligned} G' + (M + S - E - V)F &= 0 \\ F' + (M + S - E - V)G &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $F = f + g$, $G = f - g$. 只有当标量势大于或等于矢量势时, 才能有束缚态存在^[5~7]. 下面分二种情况讨论

1.1 标量势等于矢量势

当 $S = V$ 时, 方程组 (4) 成为

$$G' + (M - E + 2V)F = 0; \quad F' + (M + E)G = 0 \quad (5)$$

在方程组 (5) 中消去 G , 并把 (1) 式代入, 得

$$F'' + [(M + E)/M] \lambda_V (\lambda_V + 1) \operatorname{sech}^2 x F = (M^2 - E^2) F \quad (6)$$

对 (6) 式作变量代换 $y = \tanh x$, 则可化为

$$(1 - y^2) \frac{d^2 F}{dy^2} - 2y \frac{dF}{dy} + [U(U + 1) - \frac{T^2}{1 - y^2}] F = 0 \quad (7)$$

式中, $T = \sqrt{M^2 - E^2}$, $U = (1/4) + [(M + E)/M] \lambda_V (\lambda_V + 1) - (1/2)$. 对于束缚态, T 是实数, $U > 0$. 再由边界条件 $F|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$ 可得方程 (7) 的边界条件为 $F|_{y = \pm 1} = 0$. 由此可见, 方程 (7) 就是普遍的 associated-Legendre 方程^[4], 它的解我们已在文献 [4] 中给出. 因此有

$$T = m = U, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

亦即

$$M^2 - E^2 = (1/4) + [(M + E)/M] \lambda_V (\lambda_V + 1) - (1/2 + m), \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

(9) 式即为束缚态所满足的能谱方程. 而

$$\begin{aligned} F(x) &= P_U^{U-m}(y) = P_U^{U-m}(\tanh x) = \\ &\operatorname{sech}^{U-m} x \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k \Gamma(2U - 2k + 1)}{2^U k! (m - 2k)! \Gamma(U - k + 1)} \tanh^{m-2k} x \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $P_U^{U-m}(y)$ 是普遍的 associated-Legendre 多项式. 由 (5) 式得

$$G(x) = -\frac{F'(x)}{M + E} = -\frac{1}{M + E} \frac{d}{dx} P_U^{U-m}(\tanh x) \quad (11)$$

于是旋量波函数

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = C_m \begin{pmatrix} F(x) + G(x) \\ F(x) - G(x) \end{pmatrix} = C_m \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{M + E} \frac{d}{dx} \\ 1 + \frac{1}{M + E} \frac{d}{dx} \end{pmatrix} P_U^{U-m}(\tanh x) \quad (12)$$

式中, C_m 是归一化常数.

特别, 当 $m = 0$ 时, 基态能量 E_0 由方程

$$M^2 - E_0^2 = (1/4) + [(M + E_0)/M] \lambda_V (\lambda_V + 1) - (1/2) \quad (13)$$

给出, 基态的归一化波函数是

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = C_0 \operatorname{sech}^{U_0} x \begin{pmatrix} 1 - [U_0/(M + E_0)] \tanh x \\ 1 - [U_0/(M + E_0)] \tanh x \end{pmatrix} \quad (14)$$

式中, $U_0 = (1/4) + [(M + E_0)/M] \lambda_V (\lambda_V + 1) - (1/2)$, 归一化常数

$$C_0 = \frac{M_+ E_0}{2^0 \Gamma(U_0)} \left[\frac{(2U_0 - 1) \Gamma(2U_0)}{(2U_0 - 1)(M_+ E_0)^2 + U_0^2} \right]^{1/2} \quad (15)$$

1.2 标量势大于矢量势

当 $S > V$ 时,对方程组(4)再求一次导数得

$$\begin{aligned} F'' - [(M_+ S)^2 - (E - V)^2] F + (S' - V') G &= 0 \\ G'' - [(M_+ S)^2 - (E - V)^2] G + (S' + V') F &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

写成矩阵形式即为

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (M_+ S)^2 - (E - V)^2 & 0 \\ - (S' + V') & V' - S' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (17)$$

为了使 F 和 G 退耦,做正则变换

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

式中

$$A = \begin{pmatrix} \overline{S_0 - V_0} & \overline{S_0 - V_0} \\ \overline{S_0 + V_0} & -\overline{S_0 + V_0} \end{pmatrix} \quad (19)$$

而 $S_0 = (1/2M)(\lambda_+ + 1)\lambda_+$ 表示标量势的强度, $V_0 = (1/2M)(\lambda_+ + 1)\lambda_+$ 表示矢量势的强度. 把(18)式代入(17)式,得

$$\begin{aligned} d^2 U_1 / dx^2 &= [(M_+ S)^2 - (E - V)^2] U_1 - \overline{(S_0 + V_0) / (S_0 - V_0)} (S' - V') U_1 \\ d^2 U_2 / dx^2 &= [(M_+ S)^2 - (E - V)^2] U_2 + \overline{(S_0 + V_0) / (S_0 - V_0)} (S' - V') U_2 \end{aligned} \quad (20)$$

把(1)式代入(20)式,并做变量代换 $y = \tanh x$, 则(20)式化为

$$\begin{aligned} (1 - y^2) \frac{d^2 U_1}{dy^2} - 2y \frac{dU_1}{dy} + [U(U_+ - 1) - \frac{T}{1 - y^2} - W(1 - y^2) - 2W_y] U_1 &= 0 \\ (1 - y^2) \frac{d^2 U_2}{dy^2} - 2y \frac{dU_2}{dy} + [U(U_+ - 1) - \frac{T}{1 - y^2} - W(1 - y^2) + 2W_y] U_2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

式中, $T = \overline{M^2 - E^2}$, $U(U_+ - 1) = 2(MS_0 + EV_0)$, $W = \overline{S_0^2 - V_0^2}$. 可见通过一正则变换可以成功地使方程(16)退耦. 从(16)式到(20)式并没有代入势函数的具体表达形式, 因此这一退耦方法对任意形式的势场都是适用的.

2 一维四分量波函数

具有一维标量型和矢量型的修正 PT 势

$$S(z) = -\frac{1}{2M} \lambda_s (\lambda_+ + 1) \operatorname{sech}^2 z, \quad V(z) = -\frac{1}{2M} \lambda_v (\lambda_+ + 1) \operatorname{sech}^2 z \quad (\lambda_s > 0, \lambda_v > 0) \quad (22)$$

的一维四分量波函数由 Dirac 方程

$$[\hat{T} \hat{P}_+ U(M_+ S(z))] J(x, y, z) = [E - V(z)] J(x, y, z) \quad (23)$$

的精确解给出. 取

$$J = h(z) e^{i(p_+ x + P_+ y)} \quad (24)$$

式中, $h(z) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$ 是旋量波函数, p_1 和 p_2 是常动量. 由 (23) 式得 $h(z)$ 满足的方程是

$$V_3 \frac{dh}{dz} = [V_4(E - V) - (M + S) - iV_1 p_1 - iV_2 p_2] h \quad (25)$$

式中, V 是 4×4 Dirac 矩阵. 上式即

$$\begin{aligned} -i(dh_1/dz) &= [(E - V) - (M + S)]h_1 - (p_1 + ip_2)h_4 \\ i(dh_4/dz) &= [(E - V) - (M + S)]h_4 - (p_1 + ip_2)h_1 \\ i(dh_2/dz) &= -[(E - V) + (M + S)]h_3 - (p_1 - ip_2)h_4 \\ -i(dh_3/dz) &= -[(E - V) + (M + S)]h_4 - (p_1 + ip_2)h_3 \end{aligned} \quad (26)$$

由此可知, 若 h_1 和 h_2 已知, 则 h_3 和 h_4 由方程组 (26) 的后两式给出; 反之, 若 h_3 和 h_4 已知, 则 h_1 和 h_2 由方程组 (26) 的前两式给出. 再以 $V_3(d/dz)$ 作用于方程 (25) 的等号两边得

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \end{pmatrix} &= \left[- (E - V)^2 + (M + S)^2 + p_1^2 + p_2^2 - \begin{pmatrix} 0 & i(V' - S') \\ i(V' + S') & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \end{pmatrix} \\ \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} h_2 \\ h_4 \end{pmatrix} &= \left[- (E - V)^2 + (M + S)^2 + p_1^2 + p_2^2 + \begin{pmatrix} 0 & i(V' - S') \\ i(V' + S') & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} h_2 \\ h_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

下面分二种情况讨论上式的解.

2.1 标量势等于矢量势

当 $S = V$ 时, 由 (27) 式知 h_1 和 h_2 满足相同的微分方程

$$d^2 f / dz^2 = [M^2 - E^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2(M + E)V]f \quad (28)$$

式中, f 是 h_1 或 h_2 . 把 (22) 式代入上式并做变量代换 $y = \tanh z$, 则 (28) 式可化成

$$(1 - y^2)(d^2 f / dy^2) - 2y(df / dy) + [U(U + 1) - (T^2 / (1 - y^2))]f = 0 \quad (29)$$

式中 $T = M^2 - E^2 + p_1^2 + p_2^2$, $U = (1/4) + [(M + E)/M] \sqrt{(\lambda + 1) - (1/2)}$. 对于束缚态, T 是实数, $U > 0$. 由边界条件 $h|_{z \rightarrow \pm \infty} = 0$ 得方程 (29) 的边界条件是 $f|_{y = \pm 1} = 0$. 因此 (29) 式就是普遍的 associated-Legendre 方程^[4]. 所以有

$$T = m = U, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (30)$$

即能谱方程为

$$M^2 - E^2 + p_1^2 + p_2^2 = (1/4) + [(M + E)/M] \sqrt{(\lambda + 1) - (1/2 - m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (31)$$

而

$$f(y) = P_U^{U-m}(y) = P_U^{U-m}(\tanh z) \quad (32)$$

于是

$$h_1 = P_U^{U-m}(y) = P_U^{U-m}(\tanh z) \quad (33)$$

$$h_2 = C_m P_U^{U-m}(y) = C_m P_U^{U-m}(\tanh z) \quad (34)$$

把 (33) 和 (34) 式代入方程组 (26) 的后两式得

$$h_3 = C_m \frac{p_1 - ip_2}{M + E} P_U^{U-m}(\tanh z) - \frac{i}{M + E} \frac{d}{dz} P_U^{U-m}(\tanh z) \quad (35)$$

$$h_1 = \frac{p_1 + ip_2}{M_+ E} P_{U-m}^{U-m}(\tanh z) + \frac{iC_m}{M_+ E} \frac{d}{dz} P_{U-m}^{U-m}(\tanh z) \quad (36)$$

这样我们就给出了标量势等于矢量势时束缚态能谱 E 所满足的方程 (31) 式以及相应的四分量波函数 (33) (34) (35) 和 (36) 式. 式中 C_m 为与归一化有关的常数.

特别对于基态, $m=0$. 其能谱 E_0 由方程

$$M^2 - E_0^2 + p_1^2 + p_2^2 = (1/4) + [(M_+ E_0)/M] \lambda_V (\lambda_V + 1) - (1/2) \quad (37)$$

给出, 归一化的旋量波函数为

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\Gamma(2U_0+1)}{2^0 \Gamma(U_0+1)} \operatorname{sech}^{U_0} z, \quad h_2 = \frac{C_0 \Gamma(2U_0+1)}{2^0 \Gamma(U_0+1)} \operatorname{sech}^{U_0} z \\ h_3 &= \frac{\Gamma(2U_0+1)}{2^0 \Gamma(U_0+1)} \operatorname{sech}^{U_0} z \left[\frac{C_0(p_1 - ip_2)}{M_+ E_0} + \frac{iU_0 \tanh z}{M_+ E_0} \right] \\ h_4 &= \frac{\Gamma(2U_0+1)}{2^0 \Gamma(U_0+1)} \operatorname{sech}^{U_0} z \left[\frac{p_1 + ip_2}{M_+ E_0} - \frac{iU_0 \tanh z}{M_+ E_0} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

式中 $U_0 = (1/4) + [(M_+ E_0)/M] \lambda_V (\lambda_V + 1) - (1/2)$, 与归一化有关的常数

$$C_0 = \left\{ \frac{1}{2\Gamma(2U_0)} \left[1 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{(M_+ E_0)^2} + \frac{U_0^2}{(M_+ E_0)^2 (2U_0+1)} \right]^{-1} - \right\}^{1/2} \quad (39)$$

2.2 标量势大于矢量势

当 $S > V$ 时, 对 (27) 式做正则变换

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$A = \begin{pmatrix} \overline{S_0 - V_0} & \overline{S_0 - V_0} \\ i \overline{S_0 + V_0} & -i \overline{S_0 + V_0} \end{pmatrix} \quad (41)$$

这里 S_0 表示标量势的强度, V_0 表示矢量势的强度. 把 (40) (41) 式代入 (27) 式, 则 h 和 h_3 , h_2 和 h_4 的方程退耦, 得出

$$d^2 f / dz^2 = [(M_+ S)^2 - (E - V)^2 + p_1^2 + p_2^2] f - \overline{(S_0 + V_0) / (S_0 - V_0) (S' - V')} f \quad (42)$$

$$d^2 g / dz^2 = [(M_+ S)^2 - (E - V)^2 + p_1^2 + p_2^2] g + \overline{(S_0 + V_0) / (S_0 - V_0) (S' - V')} g$$

式中, f 是 U_1 或 $\mathcal{U}_2$, g 是 U_2 或 $\mathcal{U}_1$. 若能由 (42) 式解出 f 和 g , 则旋量波函数可由 (40) 式给出, 即已经使一维四分量的 Dirac 方程退耦. 把 (22) 式代入 (42) 式做变量代换 $y = \tanh z$, 则 (42) 式可化为 (21) 式的形式.

3 结论与讨论

以一维修正 PT 型势为例, 本文研究了一维二分量和一维四分量 Dirac 方程的束缚态解. 本文给出: ① 在标量势和矢量势相等的条件下, 我们求得了一维修正 PT 势的 Dirac 方程的一维二分量波函数和一维四分量波函数的精确解以及能谱所满足的方程. 特别是对于基态, 我们严格给出了能级和归一化波函数的表达形式. ② 当标量势大于矢量势时, 我们找到了退耦方法, 通过一正则变换即可使一维二分量和一维四分量的 Dirac 方程退耦, 其退耦方法适用于任意形式的势场.

参 考 文 献

- 1 Greiner W, Müller B, Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields, Springer-Verlag, 1985. 1
- 2 Wang R C, Wong C Y. Finite-size effect in the schwinger particle-production mechanism. Phys Rev, 1988, D38: 348
- 3 周光辉. 无反射势阱的 Schrodinger 方程的精确解. 物理学报, 1993, 42: 173
- 4 陈昌远, 胡嗣柱. 修正 Pöschl-Teller 势的 Schrodinger 方程束缚态的精确解. 物理学报, 1995, 44: 9~15
- 5 Long C, Robson D. Bound states of a relativistic quark confined by a vector potential Phys Rev, 1983, D27: 644
- 6 Fishbane P M, Gasiorowicz S G, Johansen D C, et al. Vector and scalar confining potentials and the klein paradox. Phys Rev, 1983, D27: 2433
- 7 Su R K, Ma Z Q. Confinement properties for the diral equation with scalar-like and vector-like potentials. J Phys, 1986, A19: 1739

Bound States of the Dirac Equations with One-dimensional Modified Pöschl-Teller Type Potentials

Chen Changyuan^{} Sun Guoyao*

Abstract The exact solutions of bound states of one-dimensional two-component wave-functions and one-dimensional four-component wavefunctions of the Dirac equation are obtained provided scalarlike potential and vectorlike potential of one-dimensional modified Pöschl-Teller type potential are equal to each other. The method of decoupling the correlations of the different components of the Dirac equation is also presented when scalarlike potential is stronger than vectorlike potential.

Keywords modified Pöschl-Teller potential, Dirac equation, exact solutions

^{*} Department of Physics, Jiangsu Yancheng Teacher's College, Jiangsu 310000