

正实轴上的 Hurwitz ζ 函数不等式^{*}

杨必成

朱匀华

(广东教育学院数学系, 广州 510303) (中山大学数学系)

摘 要 建立正实轴上的 Hurwitz ζ 函数不等式. 导出 Favard 常数的精确化不等式并改进了若干经典不等式.

关键词 Hurwitz ζ 函数, Riemann ζ 函数, Euler-Maclaurin 求和公式, Favard 常数

分类号 O 178

1 有关背景

解析数论的一个核心问题是 Riemann 猜想, 故 Riemann ζ 函数的性态引人关注, 而 Hurwitz ζ 函数是 Riemann ζ 函数的一般化, 所以考察 Hurwitz ζ 函数的性态, 有助于了解 Riemann ζ 函数. 本文从不等式角度探索这方面的问题. 设 $\zeta(s, a)$ ($0 < a \leq 1$) 是复平面上的 Hurwitz ζ 函数^[1], 则当 $\operatorname{Re} s > 0$ 且 $s \neq 1$ 时, 对任意 $m \in \mathbb{Z}_0$ ($\mathbb{Z}_0$ 为非负整数集, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_0 \setminus \{0\}$), 有 $\zeta(s, a) = \sum_{k=0}^m 1/(k+a)^s - (m+a)^{1-s}/(1-s) - 1/(2(m+a)^s) - s \int_m^\infty (\bar{B}_1(x)/(x+a)^{s+1}) dx$, 其中 $\bar{B}_1(x)$ 为 Bernoulli 函数. 当 $s = e > 0$ 且 $e \neq 1$ 时得正实轴上的 Hurwitz ζ 函数的极限形式

$$\zeta(e, a) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^m 1/(k+a)^e - (m+a)^{1-e}/(1-e) \right] \quad (1)$$

$$\zeta(e, a) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+a)^e \quad (e > 1) \quad (2)$$

本文先建立 $\zeta(e, a)$ 的不等式, 再导出 Favard 常数^[2]

$$K_r = (4\pi)^{\frac{r}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r-1)} / (2k+1)^{r+1} \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

的精确化不等式. 所谓 Favard 常数 K_r , 它是函数逼近理论的极值问题中经常遇到的重要常数, 特别有 $K_0 = 1$ 和 $K_1 = \pi/2$ ^[2]. 但文献还很缺乏关于这些常数本身的不等式. 此外本文需运用如下的 Euler-Maclaurin 公式^[3].

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上存在 q 阶连续导数, 则对任意 $m, n \in \mathbb{Z}_0$ 且 $m > n$, 有

$$\sum_{k=n+1}^m f(k) = \int_n^m f(x) dx + \sum_{k=1}^q \frac{(-1)^k}{k!} B_k f^{(k-1)}(x) \Big|_n^m + \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \int_n^m B_q(x) f^{(q)}(x) dx \quad (4)$$

* 广东省高等学校基础研究资助项目

收稿日期: 1996-04-29 杨必成, 男, 49岁, 副教授

其中, B_k 为 Bernoulli 数: $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30, \dots$, 满足 $B_{2k+1} = 0$, $(-1)^{k+1} B_k > 0$, $B_1(x)$ 为 Bernoulli 函数. 当 $q = 2l-1$ 时, (4) 化为

$$\sum_{k=1}^m f(k) = \int_0^m f(x) dx + \frac{f(m) - f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x) \Big|_0^m + \frac{1}{(2l-1)!} \int_0^m B_{2l-1}(x) f^{(2l-1)}(x) dx \quad (5)$$

2 关于 Euler-Maclaurin 公式的若干引理

引理 1 设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 有 $2l-2$ 阶连续导数, 且 $f^{(2k-2)}(x) > 0$, ($k \in \mathbb{Z}$), 又 $f^{(q-1)}(\infty) = 0$ ($q = 1, 2, \dots, 2l-2$). 则对任意 $n \in \mathbb{Z}_0$, $\int_n^\infty B_q(x) f^{(q)}(x) dx$ 绝对收敛, 且存在 $\epsilon \in (0, 1)$, 使

$$\delta = \frac{1}{(2l-1)!} \int_n^\infty B_{2l-1}(x) f^{(2l-1)}(x) dx = -\frac{B_{2l}\epsilon_1}{(2l)!} f^{(2l-1)}(n) \quad (6)$$

证明 由条件知 q 为奇数时 $f^{(q)}(x) < 0$, 偶数时 $f^{(q)}(x) > 0$, 从而由 $B_1(x)$ 的有界性知 $\int_n^\infty B_1(x) f^{(1)}(x) dx$ 绝对收敛. 因 $B_1(x)$ 非常值且连续^[4], 又 $\max_n |B_1(x)| = |B_1|$, 故

$$\left| \int_n^\infty B_2(x) f^{(2)}(x) dx \right| < |B_2| \int_n^\infty f^{(2)}(x) dx = -|B_2| f^{(2-1)}(n) \quad (7)$$

由分部积分和 $B_2'(x) = 2! B_{2l-1}(x)$, $B_2(n) = B_{2l}$ 得

$$\delta = \frac{1}{(2l)!} \left[-B_2 f^{(2l-1)}(n) - \int_n^\infty B_2(x) f^{(2l)}(x) dx \right] \quad (8)$$

从而由 (7), δ 与 B_{2l} 同号. 同理 δ_{l-1} 与 B_{2l-2} 同号. 又因 B_{2l-2} 与 B_{2l} 异号, 且由分部积分和 $B_{2k+1} = 0$

得 $\delta_{l-1} = -\frac{1}{(2l)!} \int_n^\infty B_{2l}(x) f^{(2l)}(x) dx$, 故 $\int_n^\infty B_2(x) f^{(2l)}(x) dx$ 与 B_{2l} 同号, 因而存在 $\eta \in (0, 1)$,

使 $\int_n^\infty B_{2l}(x) f^{(2l)}(x) dx = -B_{2l}\eta f^{(2l-1)}(n)$, 此式代入 (8), 并令 $\epsilon_{l-1} = 1 - \eta$ 即得结论.

引理 2 在引理 1 条件下, 若存在极限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^m f(k) - \int_0^m f(x) dx \right] = \beta \quad (9)$$

则对任意 $n \in \mathbb{Z}_0$, 存在 $\epsilon \in (0, 1)$, 使

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \beta + \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + \frac{B_{2l}\epsilon_1}{(2l)!} f^{(2l-1)}(n) \quad (10)$$

证明 在 (5) 式中令 $m \rightarrow \infty$, 并由 (9) 和 (6) 即得证.

引理 3 在引理 2 条件下, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} f(k+n)$ 收敛, 且存在 $\epsilon \in (-2^l, 1)$,

使

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} f(k+n) = \frac{1}{2} f(n) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2^{2k-1}) f^{(2k-1)}(n) - \frac{B_{2l}\epsilon}{(2l)!} f^{(2l-1)}(n) \quad (11)$$

证明 由条件推知 $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} f(k+n)$ 是莱布尼兹型级数, 故收敛. 在 (10) 式中令 $n = 0$, 得

$$U = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^m f(k) - \int_0^m f(x) dx \right] = \frac{1}{2} f(0) - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(0) - \frac{B_{2l}\epsilon}{(2l)!} f^{(2l-1)}(0) \quad (12)$$

从而由 (12) 对任意 $n \in \mathbb{Z}_0$, 存在 $\epsilon, \eta \in (0, 1)$, 使

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^m f(2k+n) - \int_0^m f(2x+n) dx \right] = \\
 &= \frac{1}{2} f(n) - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} 2^{2k-1} f^{(2k-1)}(n) - \frac{B_{2l} \tilde{X}}{(2l)!} 2^{2l-1} f^{(2l-1)}(n) \\
 \beta_2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{2m} f(k+n) - \int_0^{2m} f(x+n) dx \right] = \\
 &= \frac{1}{2} f(n) - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) - \frac{B_{2l} \tilde{Z}}{(2l)!} f^{(2l-1)}(n)
 \end{aligned}$$

故由 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} f(k+n) = U_2 - 2U_1$ 和 $\tilde{X} = \tilde{Z} - 2^l \tilde{X}$ 得 (11) 式.

3 关于 $\zeta(\sigma, a)$ 的不等式及其推论

定理 1 设 $a \in (0, 1], \sigma > 0, \sigma \neq 1$, 则对任意 $n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, 存在 $\epsilon \in (0, 1)$, 使

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+a)^\epsilon} &= Y(\epsilon, a) + \frac{1}{1-\epsilon} (n+a)^{1-\epsilon} + \frac{1}{2(n+a)^\epsilon} + \\
 &\quad \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{2k} \left[\frac{-\epsilon}{2k-1} \right] \frac{1}{(n+a)^{\epsilon+2k-1}} + \frac{B_{2l} \tilde{X}}{2l} \left[\frac{-\epsilon}{2l-1} \right] \frac{1}{(n+a)^{\epsilon+2l-1}} \quad (13)
 \end{aligned}$$

证明 设 $f(x) = 1/(x+a)^\sigma$, 则对任意 $n \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ 满足引理 1 条件. 又由 (1) 式知

$$\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{2m} \frac{1}{(k+a)^\sigma} - \int_0^{2m} \frac{1}{(x+a)^\sigma} dx \right] = \zeta(\sigma, a) + a^{1-\sigma} / (1-\sigma)$$

故 $f(x)$ 满足引理 2 条件, 从而代入 (10) 即得 (13).

推论 1 设 $\sigma > 0, \sigma \neq 1, \zeta(\sigma) = \zeta(\sigma, 1)$ 为正实轴上的 Riemann ζ 函数, 则对 $\forall n, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}
 Y(\epsilon) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\epsilon} - \frac{n^{1-\epsilon}}{1-\epsilon} - \frac{1}{2n^\epsilon} - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_{2k}}{2k} \left[\frac{-\epsilon}{2k-1} \right] \frac{1}{n^{\epsilon+2k-1}} - \\
 &\quad \frac{B_{2l}}{2l} \left[\frac{-\epsilon}{2l-1} \right] \frac{\epsilon_1}{n^{\epsilon+2l-1}} \quad (0 < \epsilon_1 < 1) \quad (14)
 \end{aligned}$$

评注 1 当 $\sigma = p > 1$ 时, (14) 为收敛 p -级数的精确化不等式, 且当 $l=4$ 时明显优于下式^[5]:

$$\begin{aligned}
 Y(\epsilon) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\epsilon} + \frac{n^{1-\epsilon}}{\epsilon-1} + \frac{1}{2n^\epsilon} + \frac{\epsilon}{12n^{\epsilon+1}} + \frac{1}{120} \left[\frac{-\epsilon}{3} \right] \frac{1}{n^{\epsilon+3}} + \frac{7}{12} \left[\frac{-\epsilon}{5} \right] \frac{1}{n^{\epsilon+5}} + W, \\
 |W| &< 3 \frac{1}{2!} \left[\frac{-\epsilon}{6} \right] \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\epsilon+6}} \quad (n > 1 + \frac{\epsilon+5}{2}, \epsilon > 1).
 \end{aligned}$$

推论 2 $\frac{1}{n+1/2} < \frac{c^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n+1/2} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (15)$

证明 在 (14) 中令 $\epsilon = 2$, 注意 $\zeta(2) = c^2/6$, 得

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5} < \frac{c^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$$

又因 $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \leq 1$, 且 $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5} \right) \left(n + \frac{2}{3} \right) > 1$, 故知 (15) 式成立.

评注 2 (15) 是不等式^[6] $\frac{1}{n+1} < \frac{c^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n}$ 的改进, 且 (15) 式右边的常数 $1/2$ 是最佳值.

$$\text{推论 3} \quad \overline{2n+3} - \frac{5}{3} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} < \overline{2n+1} - \frac{15}{13} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (16)$$

证明 在 (13) 中令 $a = \sigma = 1/2, l = 2$, 可得

$$0 < \sum_{k=0}^n \frac{1}{\overline{2k+1} - (1/\overline{2})} \Psi(1/2, 1/2) - \overline{2n+1} - 1/(2\overline{2n+1}) + \frac{1/(12\overline{(2n+1)^3}) < 1/(48\overline{(2n+1)^7})}{(17)}$$

在上式中取 $n = 10$, 可算得 $-\overline{0.427\,727\,93} < -\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < -\overline{0.427\,727\,44}$.

因 $x - x^3/6 + x^7/24$ 在 $(0, 1)$ 递增, 故由 (17) 得

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\overline{2k+1}} < \overline{2n+1} - \overline{0.427\,727\,44} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6\overline{27}} + \frac{1}{24\overline{3^7}} \right) < \overline{2n+1} - 2/13 \quad (18)$$

又在 (17) 左端不等式中以 $n+1$ 代替 n 后推得

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\overline{2k+1}} > \overline{2n+3} - \overline{0.427\,727\,93} - \frac{1}{2\overline{5}} - \frac{1}{60\overline{5}} > \overline{2n+3} - \frac{2}{3}$$

从而由上式与 (18) 推知 (16) 成立.

$$\text{评注 3} \quad (16) \text{ 式优于不等式}^{[6]} \quad \overline{2n+3} - \overline{3} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\overline{2k+1}} < \overline{2n+1} - 1.$$

$$\text{推论 4} \quad 2\overline{n+1} - 16/9 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\overline{k}} < 2\overline{n} - 10/9 \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

证明 在 (14) 中令 $\sigma = 1/2, l = 3$, 可得

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\overline{k}} - 2\overline{n} - \frac{1}{2\overline{n}} + \frac{1}{24\overline{n^3}} - \frac{1}{384\overline{n^7}} + \frac{X}{1024\overline{n^{11}}} \quad (0 < \epsilon_3 < 1) \quad (20)$$

在上式中取 $n = 9$, 可算得 $-\overline{1.460\,354\,51} < \zeta(1/2) < -\overline{1.460\,354\,50}$.

因 $x - x^3/12 + x^7/192$ 在 $(0, 1)$ 递增, 故当 $n \geq 2$ 时有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\overline{k}} < 2\overline{n} + \left(\frac{1}{2\overline{2}} - \frac{1}{24\overline{8}} + \frac{1}{384\overline{128}} \right) + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) <$$

$$2\overline{n} - \overline{1.121\,302\,32} < 2\overline{n} - 10/9$$

又在 (20) 中以 $n+1$ 代替 n 后, 当 $n \geq 2$ 时有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\overline{k}} > 2\overline{n+1} - \left(\frac{1}{2\overline{3}} + \frac{1}{24\overline{3^3}} - \frac{1}{384\overline{3^7}} + \frac{1}{1024\overline{3^{11}}} \right) + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) > 2\overline{n+1} - \overline{1.756\,995\,03} > 2\overline{n+1} - 16/9$$

评注 4 (19) 优于文 [7] 中 3.1.12 的不等式 (1)

$$2\overline{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\overline{k}} < 2\overline{n} - 1 \quad (n > 1).$$

4 Favard 常数的精确化不等式

给出由莱布尼兹型级数定义的函数

$$I(\sigma, a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (k+a)^\sigma \quad (\sigma > 0, 0 < a \leq 1) \quad (21)$$

则 $|I(c, a) - \sum_{k=0}^n (-1)^k / (k+a)^c| = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} / (k+n+a)^c \quad (22)$

比较 (21) 与 (3) 和 (2) 与 (3), 分别可得

$$I(2q-1, \frac{1}{2}) = \frac{c}{4} K_{2q} \circ 2^{2q-1} \quad (q \in \mathbb{Z}_0) \quad (23)$$

$$\zeta(2q, \frac{1}{2}) = \frac{c}{4} K_{2q-1} \circ 2^{2q} \quad (q \in \mathbb{Z}) \quad (24)$$

定理 2 设 $a \in (0, 1], \sigma > 0$, 则对任意 $n \in \mathbb{Z}_0, k \in \mathbb{Z}$, 存在 $\epsilon \in (-2^{2l}, 1)$, 使

$$\left| I(\sigma, a) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+a)^\sigma} \right| = \frac{1}{2(n+a)^{\sigma+1}} + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_k}{2k} (2^{2k} - 1) \left[\frac{-\sigma}{2k-1} \right] \frac{1}{(n+a)^{\sigma+2k-1}} - \frac{B_l \epsilon_l}{2l} \left[\frac{-\sigma}{2l-1} \right] \frac{1}{(n+a)^{\sigma+2l-1}} \quad (25)$$

证明 由定理 1 证明知, $f(x) = 1/(x+a)^\sigma$ 当 $\sigma \neq 1$ 时满足引理 3 条件; 当 $\sigma = 1$ 时据单调有界定理知 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+a} - \frac{m}{0} \frac{dx}{x+a} \right]$ 存在, 也满足引理 3 条件. 故把 $f(x)$ 代入 (11), 并由 (22) 得 (25).

推论 5 对任意 $n, q \in \mathbb{Z}_0, k \in \mathbb{Z}$, 有

$$\left| \frac{c}{4} K_{2q} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2q+1}} \right| = \frac{1}{2(2n+1)^{2q+1}} + \sum_{k=1}^{l-1} \left[\frac{-2q-1}{2k-1} \right] \frac{B_k (2^{2k} - 1) 2^{2k-2}}{k(2n+1)^{2q+2k}} - \left[\frac{-2q-1}{2l-1} \right] \frac{B_l 2^{2l-2} \epsilon_l'}{l(2n+1)^{2q+2l}} \quad (-2^{2l} < \epsilon_l' < 1) \quad (26)$$

证明 在 (25) 中, 令 $\sigma = 2q-1, a = 1/2$, 并利用 (23), 经简单计算得 (26).

推论 6 对任意 $n \in \mathbb{Z}_0, q \in \mathbb{Z}$, 有

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^{2q}} = \frac{c}{4} K_{2q-1} - \frac{1}{2(2q-1)(2n+1)^{2q-1}} + \frac{1}{2(2n+1)^{2q+1}} - \sum_{k=1}^{l-1} \left[\frac{-2q}{2k-1} \right] \frac{B_k 2^{2k-2}}{k(2n+1)^{2q+2k-1}} + \left[\frac{-2q}{2l-1} \right] \frac{B_l 2^{2l-2} \epsilon_l}{l(2n+1)^{2q+2l-1}} \quad (0 < \epsilon_l < 1) \quad (27)$$

证明 在 (13) 中令 $\sigma = 2q, a = 1/2$, 并利用 (24), 经简单计算即得 (27).

推论 7 $\frac{1}{4(n+1/6)} < \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{c}{4} \right| < \frac{1}{4n} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (28)$

$$\frac{1}{4(n+2/3)} < \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} - \frac{1}{2} \ln 2 \right| < \frac{1}{4(n+1/2)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

证明 在 (26) 中令 $q = 0, l = 2$, 换 n 为 $n-1$, 并注意 $K_0 = 1, \epsilon_2 > -16$, 则得

$$\left| \frac{c}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| < \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n-1)^2} + \frac{16}{15(2n-1)^4} \quad (30)$$

且当 $n \geq 2$ 时上式右端与 $2n$ 的乘积小于 $1/2$. 又在 (30) 中换 n 为 $n+1$, 并注意

$$\left| \frac{c}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| = \frac{1}{2n+1} - \left| \frac{c}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right|,$$

则得 $\frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n+1)^2} - \frac{16}{15(2n+1)^4} < \left| \frac{c}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right|$

且当 $n \geq 2$ 时上式左端与 $2n+1/3$ 的乘积大于 $1/2$. 故 (28) 当 $n \geq 2$ 时成立; 当 $n = 1$ 时直接

验证也成立.

现在 (25) 中令 $\sigma = 1$, $a = 1$, $l = 2$, 换 $n+1$ 为 n , 并注意 $I(1, 1) = \ln 2$, $\epsilon_2 > -16$, 则得

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} - \frac{1}{2} \ln 2 \right| < \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{15n^4}, \text{再用类似从 (30) 推导 (28) 的方法即可证得 (29).}$$

评注 5 (28) 和 (29) 分别优于不等式^[8]

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{1}{2(2n-1)}$$

$$\frac{1}{4(n+1)} < \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} - \frac{1}{2} \ln 2 \right| < \frac{1}{4(n-1)}$$

且 (28) 和 (29) 右边的常数 0 和 $1/2$ 是最佳值.

参 考 文 献

- 1 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1990. 123
- 2 И П. 考涅楚克. 逼近论的极值问题 (孙永生译). 上海: 上海科学技术出版社, 1982. 52
- 3 杨必成. 联系 Bernoulli 数的自然数同次幂和的公式. 数学的实践与认识, 1994, 4: 52~56
- 4 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲 (修订版). 北京: 高等教育出版社, 1983. 81~85
- 5 曹景天. 一种级数求和方法及其几个推论. 数学的实践与认识, 1990, 2: 77~84
- 6 匡继昌. 常用不等式 (第二版). 长沙: 湖南教育出版社, 1993. 79~83
- 7 Mitinovic D S. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, 1970
- 8 Kazarinoff D K. A simple derivation of the Leibniz-Gregory series for $\pi/4$. Amer Math Monthly, 1955, 62: 726~727

Inequalities on the Hurwitz Zeta-Function Restricted to the Axis of Positive Reals

Yang Bicheng* Zhu Yunhua

Abstract Some inequalities on the Hurwitz Zeta-function restricted to the axis of positive reals and on Favard's constant are built. And, some classical inequalities are refined.

Keywords Hurwitz Zeta-function, Riemann Zeta-function, Euler-Maclaurin summation formula, Favard's constant

* Department of Mathematics, Guangdong College of Education, Guangzhou 510303