

重对数律与局部鞅渐近性的一个注记^{*}

石北源 区景祺

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 给出连续局部鞅关于重对数律的不变原理, 并得到随机微分方程的一个渐近定理.

关键词 局部鞅, 重对数律, 不变原理

分类号 O 211.4

定理 1 设 $\{M(t), t \geq 0\}$ 为零初值连续局部鞅, 且 $\langle M \rangle_\infty = \infty$, a. s., 则以概率为 1,

$$\{M(t) / \sqrt{2\langle M \rangle(t) \ln \ln \langle M \rangle(t)}, \langle M \rangle(t) > e\}, (t \rightarrow \infty)$$

为 R^1 中相对紧集, 且其全体极限点恰为 $[-1, 1]$ 区间. 即以概率为 1, 使得

(1) 对任意序列 $t_n \rightarrow \infty$, 有子序列 $t_{n_k} \rightarrow \infty$ 及实数 $T \in [-1, 1]$, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(t_{n_k}) / \sqrt{2\langle M \rangle(t_{n_k}) \ln \ln \langle M \rangle(t_{n_k})} = T;$$

(2) 对任意实数 $T \in [-1, 1]$, 存在序列 $t_n \rightarrow \infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(t_n) / \sqrt{2\langle M \rangle(t_n) \ln \ln \langle M \rangle(t_n)} = T.$$

证明 (I) 当 $M(t)$ 为 $(K, \mathcal{F}, P)$ 上的 Brown 运动时, 由 Strassen 强不变原理知本定理的结论成立 (见文 [1] 290 页).

(II) 令 $t = \inf\{u: \langle M \rangle(u) > t\}$, 则由时间变换定理 (文 [2] 第二章定理 7.2) 知 $U(t) = M(t)$ 为 $(K, \mathcal{F}, P)$ 上的 Brown 运动, 且 $M(t) = B(\langle M \rangle(t))$.

(III) 设序列 $t_n \rightarrow \infty$, 则 $\langle M \rangle(t_n) \rightarrow \infty$, a. s.. 由 (I) 知存在子列 $\langle M \rangle(t_{n_k})$ 及 $T \in [-1, 1]$, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(\langle M \rangle(t_{n_k})) / \sqrt{2\langle M \rangle(t_{n_k}) \ln \ln \langle M \rangle(t_{n_k})} = T$$

由 (II) 知 $M(t_{n_k}) = B(\langle M \rangle(t_{n_k}))$, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(t_{n_k}) / \sqrt{2\langle M \rangle(t_{n_k}) \ln \ln \langle M \rangle(t_{n_k})} = T.$$

定理 1 的结论 (1) 得证.

其次, 对任意 $T \in [-1, 1]$, 由 (I) 知以概率为 1 存在序列 $t_n \rightarrow \infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(t_n) / \sqrt{2t_n \ln \ln t_n} = T.$$

* 中山大学高等学术中心基金 (96M4 97M 11) 资助项目

收稿日期: 1996-12-23 石北源, 男, 57 岁, 副教授

注意到 $\langle M \rangle (f_n) = t_n$, 于是由 (II) 知以概率为 1 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(f_n) / \sqrt{2 \langle M \rangle (f_n) \ln \ln \langle M \rangle (f_n)} = T.$$

顾及 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty$, 得证 (2).

附注 1 如用文 [2] 定理 7.2', 则条件 $\langle M \rangle (\infty) = \infty$, a. s. 可取消. 此时有定理 2

定理 2 几乎处处在 $\{\langle M \rangle (\infty) = \infty\}$ 中,

$$M(t) / \sqrt{2 \langle M \rangle (t) \ln \ln \langle M \rangle (t)}, \langle M \rangle (t) > e, (t \rightarrow \infty)$$

为 R^1 中的相对紧集, 且其极限点全体为区间 $[-1, 1]$.

推论 设 $\{M(t), t \geq 0\}$ 为零初值连续局部鞅, 则几乎处处在 $\{\langle M \rangle (\infty) = \infty\}$ 中, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) / \sqrt{2 \langle M \rangle (t) \ln \ln \langle M \rangle (t)} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) / \sqrt{2 \langle M \rangle (t) \ln \ln \langle M \rangle (t)} = -1.$$

附注 2 自 Strassen^[3] 将 Brown 运动的重对数律推广为强不变原理后, 近年来又获得很多新结果^[4,5].

附注 3 最近, N. V. Krylov^[6] 给出 Khinchin 重对数律的鞅论证. 其方法还可证明 Kolmogorov-Petrovskii 准则. 本文的结果看来可推广到 Kolmogorov-Petrovskii 准则情形, 该工作正在进行中.

作为定理 1 的应用, 我们将文 [7] 第 4 章 § 16 定理 2 之 (i) 改进如下:

定理 3 设 $C(t)$ 为 $[0, \infty)$ 上可测函数, $\forall T > 0, \int_0^T C^2(t) dt < \infty$ 及 $\int_0^\infty C^2(t) dt = \infty$.

又 $a(t, x)$ 为 $[0, \infty) \times R^1$ 上连续函数. 又随机微分方程

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + C(t) dW(t), X(0) = x$$

有解 $X(t)$, 其中 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动. 则如下结论成立:

(1) 若存在 $[0, \infty)$ 上可测函数 $U_1(t)$, 使 $\forall T > 0, \int_0^T |U_1(t)| dt < \infty$ 及

$$a(t, x) \geq U_1(t), \forall (t, x) \in [0, \infty) \times R^1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t U_1(s) ds}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} > T_1,$$

则当 $T \geq 1$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$, a. s.; 当 $T \in [-1, 1)$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$, a. s.

(2) 若存在 $[0, \infty)$ 上可测函数 $U_2(t)$, 使 $\forall T > 0, \int_0^T |U_2(t)| dt < \infty$ 及

$$a(t, x) \leq U_2(t), \forall (t, x) \in [0, \infty) \times R^1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t U_2(s) ds}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} < T_2,$$

则当 $T \leq -1$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty$, a. s.; 当 $T \in (-1, 1)$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty$, a. s.

证明 设 X_t 为 $[0, \infty)$ 上正可测函数且可积. 设 $X_1(t), t \geq 0$ 为随机微分方程

$$dX_1(t) = [U(t) - X(t)] dt + C(t) dW(t), X_1(0) = x$$

的解. 由 $U(t) - X(t) < a(t, x)$ 及随机微分方程比较定理 (文 [2] 第 6 章定理 1.1 及其证明) 知

$X_1(t) \leq X(t), \forall t \geq 0$, a. s. 故当 $T \geq 1$ 时, 由定理 1 知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t [U_1(s) - X(s)] ds}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} +$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t C(s) dW(s)}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} > \alpha_{1-} \geq 0, a.s..$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty, a.s..$ 当 $\alpha \in [-1, 1)$ 时, 由定理 1

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t [\beta_1(s) - \varepsilon(s)] ds}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} +$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t C(s) dW(s)}{2 \int_0^t C^2(s) ds \ln \ln \int_0^t C^2(s) ds} > \alpha_{1+} \geq 0, a.s..$$

故 $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty, a.s..$ 于是 (1) 得证. 类似可证 (2).

参 考 文 献

- 1 Stout W F. Almost Sure Convergence. New York Academic Press, 1974. 1~ 290
- 2 Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam North-Holland, 1981. 84~ 92
- 3 Strassen V. An invariance principle for the law of the iterated logarithm. Z Wahr V erw Geb, 1964, (3): 211~ 226
- 4 Csörgő M, Révész P. Strong Approximations in Probability and Statistics. New York Academic Press, 1981. 1~ 87
- 5 Hall P, Heyde C C. Martingale Limit Theory and its Application. New York Academic Press, 1980. 97~ 125
- 6 Krylov N V. A martingale proof of the Khinchin iterated logarithm law for Wiener processes. Lecture Notes in Math. Berlin Springer-Verlag, 1995, 1613 25~ 29
- 7 Gihma I I, Skorohod A V. Stochastic Differential Equations. Berlin Springer-Verlag, 1972. 118

Remark on the Law of the Iterated Logarithm and the Asymptotic Property of Local Martingales

Shi Beiyuan* Ou Jingqi

Abstract Obtains an invariance principle for the continuous local martingale, and, using this law, describes the oscillations of solutions for S. D. E. as $t \rightarrow \infty$.

Keywords local martingale, iterated logarithm law, invariance principle

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275