

Euler 求和公式的改进与幂和的不等式^{*}

朱匀华

杨必成

(中山大学数学系, 广州 510275) (广东教育学院数学系)

摘 要 改进了 Euler 求和公式, 建立对离散和 $\sum_{k=m}^n f(k)$ 进行不等式估值的理论, 导出幂和 $\sum_{k=m}^n k^T$ ($T \in R$) 的联系 Bernoulli 数的一般估值不等式, 并改进了若干经典不等式.

关键词 Euler 求和公式, Bernoulli 数, 有界变差函数

分类号 O 178

自从 Hardy 等人的经典著作《不等式》^[1]问世以后, 不等式理论就蓬勃发展. 本文发展了文 [2, 3] 中运用 Euler 求和公式的思想, 把 Euler 求和公式在适当条件下改进为不等式形式, 建立对离散和 $\sum_{k=m}^n f(k)$ 进行不等式估值的理论, 并运用它对幂和 $\sum_{k=m}^n k^T$ ($T \in R$) 进行精确化估算. 关于 $\sum_{k=1}^n k^T$ 的联系阶的渐近公式, 曾由文 [4, 5] 分别作出. 当 $T = -1$ 时, 文 [4] 给出

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n - \sum_{k=1}^q \frac{B_k}{kn^{k+1}} + O\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right)$$

其中, B_k ($k = 1, 2, \dots$) 为 Bernoulli 数, γ 为 Euler 数; 当 $T = -1$ 时, 文 [5] 给出

$$\sum_{k=1}^n k^T = \frac{1}{T+1} n^{T+1} + \sum_{k=1}^q \frac{(-1)^k}{k} \binom{T}{k-1} B_k n^{T-k+1} + O\left(\frac{1}{n^{q-T-1}}\right)$$

其中, $q > T+1$, γ 是与 T 有关的常数.

但这些公式只给出定性表示, 不能精确估算. 文 [6~8] 曾收录一些零星结果, 但不便于系统精确地估算幂和. 本文对 $\sum_{k=m}^n k^T$ 定量给出精确化不等式表示, 导出它联系 Bernoulli 数的一般估值不等式, 并由此改进若干经典不等式和建立某些精致不等式.

1 Euler 求和公式的改进

当参数 $h = 1$ 时 Euler 求和公式^[6]的形式是:

设 $f^{(2q-1)}(x)$ 在 $[m, n]$ 上为有界变差函数, 这里 q, m, n 都取正整数. 则存在 $\theta_q, |\theta_q| \leq 1$, 使

* 收稿日期: 1996-07-29 朱匀华, 男, 57 岁, 副教授

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x) dx + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)] + \frac{B_{2q}}{(2q)!} (1 - 2^{-2q}) [f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m) + \theta_q \sqrt[q]{m} (f^{(2q-1)})] \quad (1)$$

其中, B_k 为 Bernoulli 数: $B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, \dots$, 满足 $(-1)^{k-1} B_k > 0$; 右端第三项当 $q=1$ 时取零值. 现令

$$e_q(m, n) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)] \quad (2)$$

$$W_q(m, n) = \frac{B_{2q}}{(2q)!} (1 - 2^{-2q}) [f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m) + \theta_q \sqrt[q]{m} (f^{(2q-1)})] \quad (3)$$

则 Euler 求和公式 (1) 可写为简化的形式:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x) dx + e_q(m, n) + W_q(m, n) \quad (4)$$

引理 1 设函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上存在 $2q$ 阶导数, 则当 $f^{(2q)}(x) \geq 0$ 时, 有 $(-1)^{q-1} W_q(m, n) \geq 0$; 当 $f^{(2q)}(x) \leq 0$ 时, 有 $(-1)^{q-1} W_q(m, n) \leq 0$.

证明 因为 $f^{(2q)}(x)$ 不变号, 所以 $f^{(2q-1)}(x)$ 在 $[m, n]$ 上单调, 从而它是有界变差函数, 且

$$\sqrt[q]{m} (f^{(2q-1)}) = |f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)|$$

故由 (3) 式, 并利用 $(-1)^{q-1} B_{2q} > 0$ 可证得结论.

引理 2 设 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上存在 $2q+2$ 阶导数, 且 $f^{(2q)}(x)$ 与 $f^{(2q+2)}(x)$ 都非负 (正), 则存在 $\xi \in [0, 1]$, 使

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x) dx + e_q(m, n) + \frac{B_{2q}}{(2q)!} [f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)] \quad (5)$$

且当 $f^{(2q)}(x)$ 与 $f^{(2q+2)}(x)$ 都非负时, 有

$$(-1)^{q-1} e_q(m, n) \leq (-1)^{q-1} \left[\sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx \right] \leq (-1)^{q-1} e_{q+1}(m, n) \quad (6)$$

当 $f^{(2q)}(x)$ 与 $f^{(2q+2)}(x)$ 都非正时, 有

$$(-1)^{q-1} e_{q+1}(m, n) \leq (-1)^{q-1} \left[\sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx \right] \leq (-1)^{q-1} e_q(m, n) \quad (7)$$

证明 当 $f^{(2q)}(x)$ 与 $f^{(2q+2)}(x)$ 在 $[m, n]$ 上都非负时, 由引理 1 和 (4) 式有

$$(-1)^{q-1} \left[\sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx - e_q(m, n) \right] \geq 0$$

且此式把 q 换为 $q+1$ 时也成立. 又由 (2) 式有

$$e_{q+1}(m, n) = e_q(m, n) + \frac{B_{2q}}{(2q)!} [f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)] \quad (8)$$

因而可以推得

$$\begin{aligned} & (-1)^{q-1} \left[\sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx - e_q(m, n) \right] \leq \\ & (-1)^{q-1} \frac{B_{2q}}{(2q)!} [f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)] \end{aligned} \quad (9)$$

故存在 $\xi \in [0, 1]$, 使 (5) 式成立, 且由 (8), (9) 式可推知 (6) 式成立. 当 $f^{(2q)}(x)$ 与 $f^{(2q+2)}(x)$ 在 $[m, n]$ 上都非正时, 同理证明 (5), (7) 式成立. 证毕.

评注 1 公式 (5)~(7) 比文 [2] 的公式 300 条件较弱, 没有了一般项趋于零的条件.

(5)~(7)都是 Euler 求和公式在导数某种不变号性条件下的一种改进的不等式形式,用它们对 $\sum_{k=m}^n f(k)$ 估值时,其误差由引理 3,4表明.

引理 3 设 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上存在 $2q^{th}$ 阶导数,且 $f^{(2q)}(x)$ 与 $f^{(2q-2)}(x)$ 都非负(正),则有

$$|W_q(m, n)| + |W_{q-1}(m, n)| = \frac{|B_{2q}|}{(2q)!} |f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)| \quad (10)$$

$$|W_q(m, n)| \leq \frac{|B_{2q}|}{(2q)!} |f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)| \quad (11)$$

$$|W_{q-1}(m, n)| \leq \frac{|B_{2q}|}{(2q)!} |f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)| \quad (12)$$

证明 只需证结论 (10) 式. 由 (4) 式与 (8) 式可得

$$W_q(m, n) + [-W_{q-1}(m, n)] = e_{q-1}(m, n) - e_q(m, n) = \frac{B_{2q}}{(2q)!} [f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)]$$

又由引理 1 知 $W_q(m, n)$ 与 $-W_{q-1}(m, n)$ 非异号, 所以

$$\begin{aligned} |W_q(m, n)| + |W_{q-1}(m, n)| &= |W_q(m, n)| + |-W_{q-1}(m, n)| = \\ &|W_q(m, n) + [-W_{q-1}(m, n)]| = \frac{|B_{2q}|}{(2q)!} |f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)| \end{aligned}$$

引理 4 设 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上任意阶可导, 且 $f^{(2q)}(x)$ ($q=1, 2, \dots$) 都非负(正), 又

$$f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m) = o((2^q)^{2q}) \quad (q \rightarrow \infty) \quad (13)$$

$$\text{则: } \lim_{q \rightarrow \infty} W_q(m, n) = 0 \quad (14)$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} e_q(m, n) = \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx \quad (15)$$

证明 根据 Bernoulli 数不等式^[6]有 $|B_{2q}|/(2q)! < 2/(\pi^{2q}(2^{2q}-2))$, 从而由 (11), (13) 式推知 (14) 式成立. 又由 (14) 式和 (4) 式即知 (15) 式成立. 证毕.

注 1 满足引理 4 条件的函数存在. 例如, e^x 与 e^{Wx} ($W < 2$) 就是这类函数.

2 幂和 $\sum_{k=m}^n k^T$ ($T \in R$) 的一般估值不等式

当 T 为非负整数时, 已有 $\sum_{k=1}^n k^T$ 的恒等式^[5], 这时 $\sum_{k=m}^n k^T$ 的估值只是平凡情况, 本文不再讨论. 设 $f(x) = x^T$ ($T \in R$), 引入下阶乘函数 $[T]_k = T(T-1) \cdots (T-k+1)$, 则 $f^{(k)}(x) = [T]_k x^{T-k}$, 它在 $[1, \infty)$ 上的符号由 $[T]_k$ 的符号决定. 当 T 不是非负整数时, 通过分析 $[T]_k$ 出现的负因子个数, 不难得出下述二引理 (仔细分析的证明从略).

引理 5 设 q 为任意正整数, $f(x) = x^T$, $x \in [1, \infty)$. 则当 $T < 0$, 或者当 $T > 0$, T 非正整数, $[T]$ 为奇数时, 有 $f^{(2q)}(x) > 0$.

引理 6 设 $T > 0$, T 非正整数, $[T]$ 为偶数, q 为正整数, 则 $f(x) = x^T$ 在 $[1, \infty)$ 上满足:

(i) 当 $2q < [T]$ 时, 有 $f^{(2q)}(x) > 0$, $f^{(2q-2)}(x) > 0$;

(ii) 当 $2q > [T]$ 时, 有 $f^{(2q)}(x) < 0$, $f^{(2q-2)}(x) < 0$.

定理 1 对任意正整数 q, m, n ($m < n$), 当 $T < 0$, 或者当 $T > 0$, T 非正整数, $[T]$ 为奇数时, 都有

$$(-1)^{q-1} e_q(m, n) \leqslant (-1)^{q-1} \left(\sum_{k=m}^n k^T - \int_m^n x^T dx \right) \leqslant (-1)^{q-1} e_{q+1}(m, n) \quad (16)$$

$$e_q(m, n) = \frac{m^T + n^T}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_k}{2k} \left(\frac{T}{2k-1} \right) (n^{T-2k+1} - m^{T-2k+1}) \quad (17)$$

证明 由引理 5, $f(x) = x^T$ 满足 (6) 式的条件, 故由 (6) 式和 (2) 式即得 (16) 式和 (17) 式. 证毕.

注 2 当 $T \neq -1$ 且满足定理 1 条件时, 若取 $q=1$, 则由 (16) 式可得

$$\sum_{k=m}^n k^T - \left(\frac{n^{T+1} - m^{T+1}}{T+1} + \frac{m^T + n^T}{2} \right) \leqslant \frac{T}{12} (n^{T-1} - m^{T-1}) \quad (18)$$

特别在上式中令 $m=1$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{n^{T+1}}{T+1} + \frac{n^T}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{T+1} \right) &\leqslant \sum_{k=1}^n k^T \\ \frac{n^{T+1}}{T+1} + \frac{n^T}{2} + \frac{T}{12} n^{T-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{T+1} - \frac{T}{12} \right) &\leqslant \sum_{k=1}^n k^T \end{aligned} \quad (19)$$

若取 $q=2, m=1$, 则由 (16) 式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{720} T(T-1)(T-2)(1-n^{T-3}) &\leqslant \sum_{k=1}^n k^T - \\ &\left[\frac{n^{T+1}}{T+1} + \frac{n^T}{2} + \frac{Tn^{T-1}}{12} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{T+1} - \frac{T}{12} \right) \right] \leqslant 0 \end{aligned} \quad (20)$$

推论 1 对任意正整数 n , 有

$$2 \overline{n} + \frac{1}{2} \overline{\frac{1}{n}} - \frac{36}{24} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 2 \overline{n} + \frac{1}{2} \overline{\frac{1}{n}} - \frac{35}{24} \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \overline{\frac{1}{n}} \left(4n^{T-1} - \frac{1}{12n} \right) - \frac{561}{384} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2} \overline{\frac{1}{n}} \left(4n^{T-1} - \frac{1}{12n} \right) - \frac{560}{384} \quad (22)$$

$$\left(\frac{2}{5} n^2 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{8} \right) \overline{n} - \frac{49}{1920} \sum_{k=1}^n k^3 \leqslant \left(\frac{2}{5} n^2 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{8} \right) \overline{n} - \frac{48}{1920} \quad (23)$$

证明 在 (19) 式中取 $T = 1/2$, 可得

$$2 \overline{n} + \frac{1}{2} \overline{\frac{1}{n}} - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant 2 \overline{n} + \frac{1}{2} \overline{\frac{1}{n}} - \frac{1}{24} \overline{\frac{1}{n^3}} - \frac{35}{24}$$

把这个不等式右边再放大, 即得 (21) 式.

在 (20) 式中取 $T = 1/2$, 可得

$$\frac{1}{384} (n^{-7/2} - 1) \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \left[2 \overline{n} + \frac{1}{2} \overline{\frac{1}{n}} - \frac{1}{24} \overline{\frac{1}{n^3}} - \frac{35}{24} \right] \leqslant 0,$$

把此不等式左边再缩小, 即可导出 (22) 式.

取 $T = 3/2$, 则 $[T] = 1$ 为奇数, 满足定理 1 条件, 故可由 (20) 式类似得出 (23) 式, 证毕.

评注 2 (21) 与 (22) 式都优于下述二不等式^[7]:

$$2 \overline{n} + \frac{1}{n} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 2 \overline{n} - 1 \quad (n > 1)$$

$$2 \overline{n+1} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 2 \overline{n} - 1 \quad (n > 1).$$

(23)式是新建立的较精致不等式,两端只相差 $1/1920$. 当 $n=30\,000$ 时,用计算机算得
 下限: $62\,356\,421\,770.316\,06\dots$; 上限: $62\,356\,421\,770.316\,57\dots$;

$$\sum_{k=1}^{30\,000} k^{3/2} = 62\,356\,421\,770.316\,31\dots$$

定理 2 设 $T > 0, T$ 非正整数, $[T]$ 为偶数, 又 q, m, n 为正整数 ($m < n$), 则当 $2q < [T]$ 时, (16) 式成立; 当 $2q > [T]$ 时, 有

$$(-1)^{q-1} e_{q-1}(m, n) \leqslant (-1)^{q-1} \left(\sum_{k=m}^n k^T - \frac{n^{\frac{T}{2}+1} - m^{\frac{T}{2}+1}}{\frac{T}{2}+1} \right) \leqslant (-1)^{q-1} e_q(m, n) \quad (24)$$

其中, $e_q(m, n)$ 的表示式同 (17) 式.

证明 据引理 6, $f(x) = x^T$ 满足引理 2 条件, 故两种情形分别由 (6) 和 (7) 得结论.

注 3 当 $2q = [T]$ 时, 可直接由引理 1 导出单侧估计式或改变 q 值后再建立估计式.

注 4 (24) 与 (16) 式都是 $\sum_{k=m}^n k^T$ 的一般估值不等式. 在 (24) 式中取 $q=1, m=1$ 可得

$$\frac{n^{\frac{T}{2}+1}}{\frac{T}{2}+1} + \frac{n^T}{2} + \frac{T}{12} n^{\frac{T}{2}+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{T}{2}+1} - \frac{T}{12} \right) \leqslant \sum_{k=1}^n k^T \leqslant \frac{n^{\frac{T}{2}+1}}{\frac{T}{2}+1} + \frac{n^T}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{T}{2}+1} \right) \quad (25)$$

又在 (24) 式中取 $q=2, m=1$ 可得

$$\begin{aligned} & \leqslant \sum_{k=1}^n k^T - \left[\frac{n^{\frac{T}{2}+1}}{\frac{T}{2}+1} + \frac{n^T}{2} + \frac{T n^{\frac{T}{2}+1}}{12} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{T}{2}+1} - \frac{T}{12} \right) \right] \\ & \leqslant \frac{1}{720} T(T-1)(T-2)(1-n^{\frac{T}{2}-3}) \end{aligned} \quad (26)$$

推论 2 对任意正整数 n , 有

$$\frac{4n^{\frac{T}{2}+3}}{6} - \overline{n} - \frac{5}{24} \sum_{k=1}^n \overline{k} \leqslant \frac{4n^{\frac{T}{2}+3}}{6} - \overline{n} - \frac{4}{24} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{24} \right) - \frac{1}{n} - \frac{400}{1920} \leqslant \sum_{k=1}^n \overline{k} < \\ & \left(\frac{2n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{24} \right) - \frac{1}{n} - \frac{399}{1920} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{7} n^2 + \frac{n}{2} + \frac{5}{24} \right) n - \overline{n} + \frac{16}{2688} \leqslant \sum_{k=1}^n k^{\frac{5}{2}} < \\ & \left(\frac{2}{7} n^2 + \frac{n}{2} + \frac{5}{24} \right) n - \overline{n} + \frac{23}{2688} \end{aligned} \quad (29)$$

证明 取 $T=1/2, q=1$, 则 $2q > [T]=0$, 满足 (24) 式的条件, 故可由 (25) 式得出 (27) 式.

类似地取 $T=1/2, q=2$ 与 $T=5/2, q=2$, 则可由 (26) 式分别得出 (28) 与 (29) 式. 证毕.

评注 3 (27) 式与 (28) 式都优于不等式^[8]

$$\frac{2n}{3} - \overline{n} < \sum_{k=1}^n \overline{k} < \frac{4n^{\frac{T}{2}+3}}{6} - \overline{n},$$

且当 $n > 1$ 时优于此不等式的一个改进形式^[8]

$$\frac{2n^{\frac{T}{2}+1}}{3} - \overline{n} \leqslant \sum_{k=1}^n \overline{k} \leqslant \frac{4n^{\frac{T}{2}+3}}{6} - \overline{n} - \frac{1}{6}.$$

(29) 式是新建立的较精致的不等式. 运用以上思想方法, 还可建立幂和 $\sum_{k=1}^n k^T$ 在 T 取各种数值

时较精致的不等式 .

评注 4 若用文 [2] 的公式 300 建立 $\sum_{k=1}^n k^T$ 的不等式, 则当 $T > 0$ 时因一般项不趋于零而受限制. 虽然从余项所含的导数开始能单调趋于零 ($x \rightarrow \infty$) 时仍可运用公式, 但要展开多项至导数能趋于零, 再建立和简化不等式, 这就可能烦琐. 由此也看出本文定理 1 和定理 2 的优越性.

参 考 文 献

- 1 Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities. London: Cambridge University Press, 1934
- 2 Knopp K. Theory and Application of Infinite Series. London and Glasgow: Blackie & Son Limited, 1928. 520~ 540
- 3 杨必成. 关于一般 Hilbert 二重级数定理的改进. 数学研究, 1996, (2): 64~ 69
- 4 张南岳. Euler 数及某些与 Zeta 函数有关的和. 数学的实践与认识, 1990, (4): 62~ 70
- 5 杨必成. 联系 Bernoulli 数的自然数同次幂和的公式. 数学的实践与认识, 1994, (4): 52~ 56
- 6 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲 (修订版). 北京: 高等教育出版社, 1983. 96~ 170
- 7 密特利诺维奇 D S. 解析不等式. 张小萍, 王龙译. 北京: 科学出版社, 1987. 257~ 258
- 8 匡继昌. 常用不等式 (第二版). 长沙: 湖南教育出版社, 1993. 83~ 84

Improvement on Euler's Summation Formula and Some Inequalities on Sums of Powers

Zhu Yunhua* Yang Bicheng

Abstract This paper improves Euler's summation formula and establishes some general inequalities for estimating $\sum_{k=m}^n f(k)$ and the sums of the T -th powers of natural numbers $\sum_{k=m}^n k^T$ ($T \in R$) in relation to Bernoulli's numbers. And, some classical inequalities are refined.

Keywords Euler's summation formula, Bernoulli's numbers, bounded variation function

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275