

更新过程的 Chung 重对数律^{*}

张玉成

宋世斌

(深圳教育学院数学系, 深圳 518029) (中山大学数学系)

摘 要 得到一类更新过程的 Chung 重对数律, 该更新过程间距是一列独立同分布的非负值随机变量, 且期望和方差都存在并都不等于零.

关键词 更新过程, 重对数律

分类号 O 211.4

1 主要结果

设 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一列独立同分布非负值随机变量. 设 $\mu = EX_1$ 和 $\sigma^2 = DX_1$ 都存在且都不等于零. 定义 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i (n \geq 1)$ 及

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\} \quad (t \geq 0)$$

称过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新过程.

显然, 我们知道 $N(t)$ 满足大数定律、中心极限定理以及重对数律, 见文 [1, 2], 即有:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} &= \frac{1}{\mu} \quad \text{a. e.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P\left\{\frac{N(t) - t/\mu}{t\sigma/\sqrt{t}} < x\right\} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t) - t/\mu}{2\sigma^2 t \ln \ln t} &= 1 \quad \text{a. e.} \end{aligned}$$

一个自然的问题是: $N(t)$ 是否满足 Chung 重对数律? 本文对此问题给出一个肯定的答复并得到如下的结果.

定理 P -几乎处处, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{s \leq t} |N(s) - s/\mu|}{\sigma^2 t / \ln \ln t} = \frac{\pi}{8}$$

该定理的证明需要用到下述引理, 此引理是 Chung-Jain-Pruitt 定理的一个推论^[3].

引理 P -几乎处处, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{k \leq n} |S_k - k/\mu|}{n\sigma^2 / \ln \ln n} = \frac{\pi}{8}$

2 定理的证明

先证对任何 $\varepsilon > 0$,

* 收稿日期: 1996-03-15 张玉成, 男, 43 岁, 副教授

$$P\left\{\frac{\sup_{k \leq n} |N(s) - \frac{s}{n}|}{n e^{2-\frac{1}{n}} / \ln \ln(n)} \leq (1+2X) \frac{\pi}{8}\right\} = 1 \quad (1)$$

记

$$r_n^\pm(s) = \frac{s \pm (1+X) \frac{\pi}{8}}{n e^{2-\frac{1}{n}} / \ln \ln(n)}$$

且

$$An = \left\{ \frac{\sup_{k \leq n} |N(s) - \frac{s}{n}| \leq (1+2X) \frac{\pi}{8}}{n e^{2-\frac{1}{n}} / \ln \ln(n)} \right\}$$

则当 n 充分大时,有

$$\left\{ \frac{\sup_{k \leq n} |S_k - k|}{n e^2 / \ln \ln n} \leq (1+\frac{X}{2}) \frac{\pi}{8} \right\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ S_{[r_n^-(s)]} - [r_n^-(s)] \leq (1+\frac{X}{2}) \frac{\pi}{8} \frac{1}{n e^2 / \ln \ln n} \right\}$$

且

$$S_{[r_n^+(s)]} - [r_n^+(s)] \geq - (1+\frac{X}{2}) \frac{\pi}{8} \frac{1}{n e^2 / \ln \ln n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ S_{[r_n^-(s)]} \leq s; S_{[r_n^+(s)]} > s \right\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ N(s) \geq [r_n^-(s)] \text{ 且 } N(s) < [r_n^+(s)] \right\} \subset An$$

其中 $[r]$ 表示 r 的整数部分.

$$\text{由引理知: } P\left\{ \frac{\sup_{k \leq n} |S_k - k|}{n e^2 / \ln \ln n} \leq (1+\frac{X}{2}) \frac{\pi}{8}, \text{ i. o.} \right\} = 1$$

因此, $P(An, \text{ i. o.}) = 1$, 即 (1) 式成立. 所以,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{k \leq t} |N(s) - \frac{s}{t}|}{e^{2-\frac{1}{t}} t / \ln \ln t} \leq \frac{1}{1-X} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{k \leq (\lfloor \frac{t}{1-X} \rfloor + 1)(1-X)} |N(s) - \frac{s}{t}|}{(\lfloor \frac{t}{1-X} \rfloor + 1) e^{2-\frac{1}{t}} t / \ln \ln (\lfloor \frac{t}{1-X} \rfloor + 1)} \leq \frac{(1+2X)^c}{8(1-X)} \quad \text{a. e.}$$

令 $X \rightarrow 0$, 得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{k \leq t} |N(s) - \frac{s}{t}|}{e^{2-\frac{1}{t}} t / \ln \ln t} \leq \frac{\pi}{8}, \quad \text{a. e.} \quad (2)$$

再证对任何 $0 < X < 1/4$ 有

$$P\left\{ \frac{\sup_{k \leq t} |N(s) - \frac{s}{t}|}{e^{2-\frac{1}{t}} t / \ln \ln t} \leq (1-X) \frac{\pi}{8}, \text{ i. o. } t \rightarrow \infty \right\} = 0 \quad (3)$$

记

$$R_t^\pm(s) = \frac{s \pm (1-X) \frac{\pi}{8}}{e^{2-\frac{1}{t}} t / \ln \ln t}$$

$$B_t = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |N(s) - \frac{s}{t}| \leq (1-X) \frac{\pi}{8} \frac{1}{e^{2-\frac{1}{t}} t / \ln \ln t} \right\}$$

$$C_t = \left\{ \sup_{k \leq [t]} |S_k - k| \leq [t] X \right\}$$

则由强大数定律, 易得:

$$P(C, \text{ i. o. }, t \rightarrow \infty) = 0 \quad (4)$$

当 t 充分大时, 即有

$$B_t \cap C_t \subset \left\{ N(t) \geq [R_t^-(s)] \text{ 且 } N(s) < [R_t^+(s)] + 1 \right\} \cap C_t$$

$$\bigcap_{k \leq k_0} \left\{ S_k \leq s \text{ 且 } S_{k+1} > s \right\} \cap C \subset \left\{ \frac{\sup_{k \leq (1-X/3)^{2/t}} |S_k - k_-|}{\frac{t}{e^2} \ln \ln \frac{t}{-}} \leq \left(1 - \frac{X}{2}\right) \frac{\pi}{8} \right\}$$

由引理知

$$P \left\{ \frac{\sup_{k \leq (1-X/3)^{2/t}} |S_k - k_-|}{\frac{t}{e^2} \ln \ln \frac{t}{-}} \leq \left(1 - \frac{X}{2}\right) \frac{\pi}{8}, \text{ i. o. } t \rightarrow \infty \right\} = 0$$

所以,

$$P(B \cap C, \text{ i. o. } t \rightarrow \infty) = 0 \quad (5)$$

因此, 由式 (4)、(5) 知 (3) 式成立. 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{k \leq t} |N(s) - \frac{s}{-}|}{\frac{e^{-3}}{t} \ln \ln t} \geq (1-X) \frac{\pi}{8}, \text{ a. e.}$

再由 X 的任意性可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{k \leq t} |N(s) - \frac{s}{-}|}{\frac{e^{-3}}{t} \ln \ln t} \geq \frac{c}{8}, \text{ a. e.} \quad (6)$$

由式 (2)、(6) 即得定理的结果.

参 考 文 献

- 1 Ross S M. Stochastic Processes. New York: John Wiley & Sons, 1983
- 2 Hall P, Heyde C C. Martingale Limit Theory and Its Application. New York: Academic Press, 1980
- 3 郑明. 独立增量过程的 Chung 重对数律. 科学通报, 1992, 37(23): 2121~ 2124

Chung's Law of the Iterated Logarithm for Renewal Processes

Zhang Yucheng* Song Shibin

Abstract Let $\{N(t), t \geq 0\}$ be a renewal process. Its interarrival times $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ are a sequence of nonnegative independent and identically distributed random variables with nonzero mean and variance. This paper obtains the Chung's law of the iterated logarithm for the renewal process.

Keywords renewal process, law of the iterated logarithm

* Department of Mathematics, Shenzhen College of Education, Shenzhen 518029