

临界增长的 Laplace 方程的 Neumann 边值问题^{*}

张桂宜

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 利用临界点理论讨论了一类临界增长的半线性椭圆型方程在超线性边界条件下 Neumann 问题的解的存在性和多解性.

关键词 半线性椭圆型方程, Neumann 问题, 临界增长

分类号 O 175. 25

1 有关假设

设 $K \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) 为一有界光滑区域, 本文讨论如下 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-1}u + a(x)u + g(x, u) & x \in K \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} = j(x)|u|^{q-1}u & x \in K \end{cases} \quad (1)$$

的解之存在性及多解性. 其中 λ 为正参数, $p = (N+2)/(N-2)$, $\lambda |u|^{p-1}u$ 为临界增长项, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 为外法向导数, $1 \leq q \leq N/(N-2)$. 现假定 $h: a(x) \in L^\infty(K)$, $a(x) \leq 0$, $j(x) \in C(K)$, $j(x) > 0$, 并设 $g: g(x, u) \in C(K \times \mathbb{R}^1)$, $g(x, 0) = 0$; $g: \lim_{u \rightarrow 0} g(x, u)/u = 0$, 关于 x 一致; $g: \lim_{u \rightarrow \infty} g(x, u)/|u|^{p-1}u = 0$ 关于 x 一致; $g: \exists \theta, 1/(p+1) < \theta < 1/(q+1)$ 使得 $\theta g(x, u)u$

$-G(x, u) \geq 0$, 其中 $G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt$.

由于 $q \geq 1$, 所以边值是超线性的, 而且这里允许 $q = N/(N-2)$, 即边值也可以是临界增长的 (关于边界嵌入), 因此本文不仅得到与文 [1] 类似的结论, 而且对多解性的讨论还进一步丰富了这方面的结果. 此外, 本文对问题的具体处理也与文 [1] 有所不同.

记 $E = H^1(K) \cap L^{q^*-1}(K)$, 定义其上的范数为

$$\|u\|_E = \left(\int_K |Du|^2 - a(x)u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_K j(x)|u|^{q-1} ds \right)^{\frac{1}{q+1}}$$

易见 E 以范数 $\|\cdot\|_E$ 成为一 Banach 空间.

$u \in E$ 称为 (1) 的弱解, 如果下式成立

$$\int_K \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} - \lambda |u|^{p-1}uh - a(x)uh - g(x, u)h \right) dx + \int_K j(x)|u|^{q-1}uh ds = 0, \forall h \in E$$

* 收稿日期: 1996-03-05 张桂宜, 男, 35 岁, 博士

在 E 上定义泛函

$$I_{\lambda}(u) = \int_K \left(\frac{1}{2} |Du|^2 - \frac{\lambda}{p+1} |u|^{p+1} - \frac{1}{2} a(x) u^2 - G(x, u) \right) dx + \frac{1}{q+1} \int_K j(x) |u|^{q+1} ds \quad (2)$$

可以证明 $I_{\lambda}(u) \in C^1$, 根据临界点理论, 问题 (1) 之弱解相应于泛函 $I_{\lambda}(u)$ 的临界点.

2 $(PS)_c$ 条件

记 $S^2(C_N/2) = NC_N^{1/N} / 2^{1/N} B^{1/(p^*-1)}$, 其中 C_N 为 R^N 中单位球的测度, B 为 Bliss 常数, 即

$$B = (p+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{p^*} \left\{ \frac{\Gamma(2(p+1)/(p-1))}{\Gamma((p+1)/(p-1)) \Gamma(2p/(p-1))} \right\}^{(1-p)/(p+1)} \quad (3)$$

$S^2(C_N/2)$ 和 B 的意义可见文 [2], 而且由文 [2] 还知:

$$S^2(C_N/2) = S/2^{1/N} \quad (S \text{ 为 Soblev 最佳嵌入常数}).$$

引理 1 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^1(K)$, 那么对于 $\forall X > 0$ 有

$$\int_K |Du_n|^2 dx \geq (S^2(\frac{C_N}{2}) - X)^2 (1 + X^{-1} \int_K |u_n|^{p^*-1} dx)^{2/(p^*-1)} + C \int_K |u_n|^2 dx$$

其中常数 C 与 u_n 无关.

证明 利用边界的光滑性及“展平”技巧并结合单位分解原理不难给出本引理的证明.

定理 1 泛函 $I_{\lambda}(u)$ 在 $0 < C < (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1})(S^2(\frac{C_N}{2}))^N \lambda^{\frac{N}{2}-1}$ 上满足 $(PS)_c$ 条件.

证明 设对于 $0 < C < (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1})(S^2(\frac{C_N}{2}))^N \lambda^{\frac{N}{2}-1}$ (5)

有数列 $\{u_n\} \subset E$, 满足

$I_{\lambda}(u_n) \rightarrow C$, $I'_{\lambda}(u_n) \rightarrow 0$ (在 E^* 中), E^* 为 E 的对偶空间. 即有 (当 $n \rightarrow \infty$ 时)

$$\int_K \left(\frac{1}{2} |Du_n|^2 - \frac{\lambda}{p+1} |u_n|^{p+1} - \frac{1}{2} a(x) u_n^2 - G(x, u_n) \right) dx + \frac{1}{q+1} \int_K j(x) |u_n|^{q+1} ds = C + o(1) \quad (6)$$

$$\int_K \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} - \lambda |u_n|^{p-1} u_n h - a(x) u_n h - g(x, u_n) h \right) dx + \int_K j(x) |u_n|^{q-1} u_n h dS = o(1) \|h\|_E, \forall h \in E \quad (7)$$

在 (7) 中取 $h = u_n$ 然后两边乘以 θ 并与 (6) 相减, 注意到假设 g_4 得

$$\left(\frac{1}{2} - \theta \right) \int_K (|Du_n|^2 - a(x) u_n^2) dx + \left(\frac{1}{q+1} - \theta \right) \int_K j(x) |u_n|^{q+1} ds \leq C + o(1) - o(1) \|u_n\|_E$$

由此即知 $\|u_n\|_E$ 有界. 于是存在 $\{u_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{u_n\}$) 以及 $u \in E$ 使得

$$\left. \begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ 在 } E \text{ 中弱收敛} \\ u_n &\rightarrow u \text{ 在 } L^2(K) \text{ 及 } L^2(\mathcal{K}) \text{ 中强收敛} \\ u_n &\rightarrow u \text{ a.e. } \mathcal{K} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由嵌入定理知 $\{u_n\}$ 在 $L^{p^*-1}(K)$ 中有界, 再由 $\|u_n\|_E$ 有界知 $\|u_n\|_{L^{q^*-1}(\mathcal{K})}$ 有界, 因此

$$\left. \begin{aligned} & \|u_n\|^{p^*-1} u_n \rightharpoonup \|u\|^{p^*-1} u, \quad \text{在 } (L^{p^*-1}(K))^* \text{ 中弱收敛} \\ & g(x, u_n) \xrightarrow{n} g(x, u), \quad \text{在 } (L^{p^*-1}(K))^* \text{ 中弱收敛} \\ & \|u_n\|^{q^*-1} u_n \xrightarrow{n} \|u\|^{q^*-1} u, \quad \text{在 } ((L^{q^*-1}(K))^* \text{ 中弱收敛} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由上述收敛性以及对 $g(x, u)$ 的假设不难得到

$$\left. \begin{aligned} & \int_K g(x, u_n) u_n dx \xrightarrow{n} \int_K g(x, u) u dx \\ & \int_K G(x, u_n) dx \xrightarrow{n} \int_K G(x, u) dx \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在 (7) 中取 $h = u$ 然后利用 (8) (9) 令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\int_K (|Du|^2 - \lambda |u|^{p^*-1} - a(x)u^2 - g(x, u)u) dx + \int_K j(x) |u|^{q^*-1} ds = 0 \quad (11)$$

将 u 代入 $I_\lambda(u)$ 的定义式 (2) 得

$$I_\lambda(u) = \int_K \left(\frac{1}{2} |Du|^2 - \frac{\lambda}{p^+ - 1} |u|^{p^*-1} - \frac{1}{2} a(x)u^2 - G(x, u) \right) dx + \frac{1}{q^+ - 1} \int_K j(x) |u|^{q^*-1} ds \quad (12)$$

(12) - $\theta \times$ (11) 得

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) = & \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \int_K (|Du|^2 - a(x)u^2) dx + \left(\theta - \frac{1}{p^+ - 1} \right) \lambda \int_K |u|^{p^*-1} dx + \\ & \int_K (\theta g(x, u)u - G(x, u)) dx + \left(\frac{1}{q^+ - 1} - \theta \right) \int_K j(x) |u|^{q^*-1} ds \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

另一方面, 令 $v_n = u_n - u$, 则由 Brezis-Lieb 引理^[3]及式 (8) ~ (12), 当 $n \rightarrow \infty$ 时从 (6) 和 (7) (取 $h = u_n$) 可得:

$$I_\lambda(u) = C + o(1) - \frac{1}{2} \int_K (|Dv_n|^2 - a(x)v_n^2) dx + \frac{\lambda}{p^+ - 1} \int_K |v_n|^{p^*-1} dx - \frac{1}{q^+ - 1} \int_K j(x) |v_n|^{q^*-1} ds \quad (14)$$

$$\int_K (|Dv_n|^2 - a(x)v_n^2) dx + \int_K j(x) |v_n|^{q^*-1} ds = o(1) + \lambda \int_K |v_n|^{p^*-1} dx \quad (15)$$

$$\text{令} \quad \int_K (|Dv_n|^2 - a(x)v_n^2) dx + \int_K j(x) |v_n|^{q^*-1} ds \xrightarrow{n} U \geq 0$$

由 (15) 即得 $\int_K |v_n|^{p^*-1} dx \xrightarrow{n} U \lambda$, 由引理 1

$$\text{有} \quad \int_K |Dv_n|^2 dx \geq [S^2(\frac{C_N}{2}) - X]^2 (1 + X)^{-1} \left(\int_K |v_n|^{p^*-1} dx \right)^{2/(p^*-1)} + C \int_K |v_n|^2 dx,$$

进而有

$$\begin{aligned} & \int_K (|Dv_n|^2 - a(x)v_n^2) dx + \int_K h(x) |v_n|^{q^*-1} ds \geq \\ & [S^2(\frac{C_N}{2}) - X]^2 (1 + X)^{-1} \left(\int_K |v_n|^{p^*-1} dx \right)^{2/(p^*-1)} + C \int_K |v_n|^2 dx \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 在上式两边取极限得

$$U \geq [S^2(\frac{C_N}{2}) - X]^2 (1 + X)^{-1} (U \lambda)^{2/(p^*-1)}$$

再令 $X \rightarrow 0$ 得

$$U \geq (S^2(\frac{C_N}{2}))^2 (U\lambda)^{2/(p^*-1)}$$

如果 $U > 0$, 则有 $U \geq (S^2(\frac{C_N}{2}))^N \lambda^{(\frac{N}{2}-1)}$, 而由 (14) 并注意到 (5) 得

$$I_\lambda(u) \leq C - (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) U \leq C - (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) (S^2(\frac{C_N}{2}))^N \lambda^{(\frac{N}{2}-1)} < 0$$

这与 (13) 矛盾. 因此必有 $U \equiv 0$, 即有 $\|u_n - u\|_{E_n} \rightarrow 0$. 定理证毕.

3 存在性定理

引理 2 如果假定 $h, g_1 \sim g_3$ 成立, 那么存在正数 d_0 以及 E 中零元的一个邻域 U , 使得 $I_\lambda(u)|_U \geq d_0 > 0$

引理 3 如果假定 $h, g_1 \sim g_3$ 成立, 那么对于 $u \in E, u \neq 0$, 有 $I_\lambda(tu) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$.

定理 2 设 $a(x), j(x)$ 及 $g(x, u)$ 满足假定 $h, g_1 \sim g_4$, 如果存在 $u_0 \in E, u_0 \neq 0$ 使得

$$\sup_{t \geq 0} I_\lambda(tu_0) < (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) (S^2(\frac{C_N}{2}))^N \lambda^{(\frac{N}{2}-1)} \quad (16)$$

那么问题 (1) 至少存在一非平凡弱解.

证明 由引理 3 可取一个 t_0 充分大使得 $I_\lambda(t_0 u_0) < 0$ 且 $t_0 u_0 \in U$ (这里 U 为引理 2 中的邻域). 记 $v_0 = t_0 u_0$, 则 $v_0 \in U$ 且 $I_\lambda(u_0) < 0 < d_0$ (d_0 为引理 2 中的常数).

由 $I_\lambda(u)$ 的定义知 $I_\lambda(0) = 0 (< d_0)$, 结合引理 2 即知 $I_\lambda(u)$ 满足没有 (PS) 条件的山路定理^[4]的所有条件. 记 $C_0 = \inf_{u \in P} \sup_{u \in W} I_\lambda(u) \geq d_0$, 其中 P 为连接 E 中 0 和 v_0 的所有连续路径之集合.

由没有 (PS) 条件的山路定理知存在 E 中的序列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 使得

$$I_\lambda(u_j) \rightarrow C_0, \quad I'_\lambda(u_j) \rightarrow 0 \quad (\text{在 } E^* \text{ 中}) \quad (17)$$

由 (16) 式, $C_0 \leq \sup_{t \geq 0} I_\lambda(tu_0) < (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) (S^2(\frac{C_N}{2}))^N \lambda^{(\frac{N}{2}-1)}$, 于是由定理 1 知存在 $\{u_j\}$ 的子列 $\{u_{j_k}\}$ 及 $u \in E$ 使得 $u_{j_k} \xrightarrow{k} u$ 在 E 中强收敛.

这样由 (17) 式就有 $I_\lambda(u) = 0, I'_\lambda(u) = C_0$, 由 $C_0 > 0$ 知 $u \neq 0$, 因此泛函 $I_\lambda(u)$ 至少有一个非零临界点, 即问题 (1) 至少有一个非平凡弱解. 定理证毕.

4 多解性结果

在讨论多解性时将用到对偶变分原理^[5].

设 X 为 Banach 空间, $B = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq 1\}$, I 是 X 上的 C^1 泛函, V 是定义在 X 中紧的关于原点对称的集上的亏格. 现记:

$$K_b = \{u \in X \mid I(u) = b, I'(u) = 0\}$$

$$P^* = \{k \in C(X, X) \mid k(0) = 0, k \text{ 是奇同胚且 } k(B) \subset \{u \in X \mid I(u) \geq 0\}\}$$

$$P_m = \{K \subset X \mid K \text{ 紧, 原点对称, } k \in P^*, V(K \cap k(\partial B)) \geq m\}$$

引理 4 (对偶变分原理) 设 X 是 Banach 空间, $I(u) \in C^1(X, \mathbb{R})$ 满足条件 $I_1: I(0) = 0, I(-u) = I(u); I_2$ 存在 $d > 0, T > 0$ 使得 $I(u)$ 在 $B_d \setminus \{0\}$ 上大于零而且 $I(u)|_{\partial B_p} \geq T > 0$, 其中 $B_d = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq d\}; I_3$ I 在 $0 < C < M$ 上满足 (PS)_c 条件; I_4 对任意有限维子空间 $X \subset X, X \cap \{u \in X \mid I(u) \geq 0\}$ 是有界的.

记 $b_m = \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} I(u)$, 其中 m 为自然数. 那么有

① $0 < \mathbb{K} \leq b_m \leq b_{m+1}$; ② 如果 $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_{m+l} = b < M$, 那么 $V(k_b) \geq l$.

证明 此引理为文 [5] 中定理 2.8 的变形, 只需将文 [5] 中的定理 2.8 的 (PS) 条件换成 (PS)_c 条件, 然后完全类似于文 [5] 中的证明即得本引理.

引理 5 设 $a(x), j(x)$ 满足假定 $h, g(x, u)$ 满足 g_1, g_3 , 那么存在与 λ 无关的 $A_m (m = 1, 2, \cdots)$, 使得对所有的 $\lambda > 0$ 有 $b_m^\lambda < A_m$, 其中 $b_m^\lambda = \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} I(u)$.

证明 由 g_1, g_3 知, $\forall X > 0, \exists C_X > 0$ 使得 $|G(x, u)| \leq X|u|^{p^*-1} + C_X$
由嵌入定理知 $\int_K |u|^{p^*-1} dx \leq \tilde{C} \|u\|_E^{p^*-1}$

在 P_m 的定义中取 $X = E$, 由 (2) 得

$$b_m^\lambda = \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} I(u) \leq \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_K (|Du|^2 - a(x)u^2) dx + \frac{1}{q+1} \int_K j(x)|u|^{q^*-1} ds - \int_K G(x, u) dx \right\} \leq \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} \{C_1 \|u\|_E^2 + C_2 \|u\|_E^{q^*-1} + C_X \|u\|_E^{p^*-1} + C_X\}$$

由于 K 为 E 中的紧集, 因此必存在 $M_K > 0$ 使得对任意的 $u \in K$ 都有 $\|u\|_E \leq M_K$. 由此可知必存在 A_m (与 λ 无关) 使得 $b_m^\lambda \leq A_m - 1 < +\infty$.

定理 3 设 $a(x), j(x)$ 满足假定 $h, g(x, u)$ 满足 $g_1 \sim g_4$, 并且 $g(x, u)$ 关于变量 u 是奇的. 那么存在一列正数 $\{g_m\}$: $g_0 > g_1 > \cdots > g_m > g_{m+1} > \cdots$, 使得当 $\lambda \in [g_m, g_{m+1})$ 时, 问题 (1) 至少存在 m 对非平凡弱解.

证明 在引理 4 中取 $X = E, I = I_k$, 由以上对 $g(x, u)$ 的假设和定理 1 取 $M = (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) [S^2(C_N/2)]^N \lambda^{(\frac{N}{2}-1)}$ 不难验证 $I_k(u)$ 满足引理 4 之 $I_1 \sim I_4$, 现选取 $g_m > 0$ 使得 $g_0 > g_1 > \cdots > g_m > g_{m+1} > \cdots$, 且使 $A_{m+1} \leq (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) [(S^2(\frac{C_N}{2}))^N / g_m^{(\frac{N}{2}-1)}] (m = 0, 1, 2, \cdots)$, 此处 A_m 为引理 5 中的常数. 那么当 $\lambda \in [g_m, g_{m+1})$ 时有

$$0 < b_1^\lambda \leq b_2^\lambda \leq \cdots \leq b_m^\lambda < A_{m+1} \leq (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) [S^2(\frac{C_N}{2})]^N / g_{m+1}^{(\frac{N}{2}-1)} < (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}) (S^2(\frac{C_N}{2}))^N \lambda^{(\frac{N}{2}-1)} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

从而由引理 4 可知 $I_k(u)$ 至少存在 m 对非平凡临界点, 即问题 (1) 至少有 m 对非平凡弱解. 定理得证.

注记: 如果 $\lambda = 0, q = 1$, 则问题 (1) 退化为非临界增长的情形. 假设 $a(x), h(x)$ 仍满足假定 $h, g(x, u)$ 满足 $g_1 \sim g_3$, 并且存在 $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $\theta g(x, u) - G(x, u) \geq 0$, 那么问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + g(x, u) & x \in K \\ -\partial_u I = h(x)u & x \in K \end{cases} \quad (1')$$

有无穷多个非平凡弱解.

事实上, 利用通常已知的方法不难证明泛函

$$I_0(u) = \int_K \left[\frac{1}{2} |Du|^2 - \frac{1}{2} a(x)u^2 - G(x, u) \right] dx + \frac{1}{2} \int_K j(x)u^2 ds$$

满足 (PS) 条件. 再利用已知条件可验证 $I_0(u)$ 满足对偶变分原理的条件 [5]. 从而 $I_0(u)$ 具有无穷多个非平凡临界点, 即问题 (1') 有无穷多个非平凡弱解.

致谢: 本文得到林伟教授的指导与帮助.

参 考 文 献

- 1 Deng Y, Wang X, Wu S. Neumann problem of elliptic equations with limit nonlinearity in boundary condition. Chin Ann of Math, 1994, 13B(3): 299~ 310
- 2 Lions P L, Pacella F, Tricarico M . Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions. Indi Univ Math J, 1988, 37(2): 301~ 324
- 3 Brezis H, Lieb E. A relation between pointwise convergence functions and convergence of functionals. Proc Amer Math Soc, 1983, 88 486~ 490
- 4 Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equation involving critical Sobolev exponents. Comm Pur Appl Math, 1983, 36 346~ 477
- 5 Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual variational methods in critical point theory and application. J Funct Anal, 1973, 14 347~ 381

Neumann Problem of Laplace Equations Involving Critical Sobolev Exponents

Zhang Guiyi^{*}

Abstract The critical point theory is used to deal with the existence and multiplicity of solutions of Neumann problem of a semilinear elliptic equation with critical sobolev growth under a superlinear boundary condition.

Keywords semilinear elliptic equation, Neumann problem, critical sobolev growth

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275