

齐型空间上 BMO 的原子分解^{*}

李文明 邓东皋

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 利用齐型空间上 Calderon 型再生公式得到齐型空间上 BMO 函数的光滑原子分解.

关键词 齐型空间, BMO, 原子分解

分类号 O 174.3

作为 Hardy 空间 H^1 的对偶空间, BMO 在 R^n 上的调和分析中扮演着十分重要的角色. 经过多年来的研究, 得到了 BMO (R^n) 的许多特征刻画^[1]. 但是对于更具一般性的齐型空间, 其上 BMO 的特征却所得不多^[2,3]. 本文利用邓东皋与韩永生^[4]得到的齐型空间上的 Calderon 型再生公式, 给出齐型空间上 BMO 的一个光滑原子分解特征. 这一分解类似于 R^n 上 BMO 的小波分解, 其分解系数满足 Carleson 条件.

1 主要定理

设 $(X, d, \underline{})$ 是一个齐型空间, 定义详见文 [2], 其中 d 是 X 上的一个拟距离, $\underline{}$ 是 X 上满足两倍条件的非负测度. Macias 与 Segovia^[5]证明了存在与 d 等价的拟距离 d' 使得存在常数 $C > 0$ 以及某个 θ , $0 < \theta < 1$ 满足

$$d(x, y) \sim \inf \{ \underline{}(B) : B \text{ 是包含 } x \text{ 与 } y \text{ 的球} \},$$
$$|d(x, y) - d(x', y)| \leq C d(x, x')^\theta [d(x, y) + d(x', y)]^{1-\theta}, \text{ 对所有的 } x, x' \text{ 与 } y \in X \text{ 成立.}$$

本文恒假定对所有的 $x \in X$ 有 $\underline{}(\{x\}) = 0$.

定义 1 X 上定义的函数 $a(x)$ 称为是一个 $(1, \infty)$ 原子, 如果

(1) 存在 $x_0 \in X, r > 0$ 使得 $\text{supp } a(x) \subset B(x_0, r)$;

(2) $\|a\|_\infty \leq \underline{}(B(x_0, r))^{-1}$;

(3) $\int a(x) d\underline{}(x) = 0$

X 上的 Hardy 空间 H^1 与 BMO 可定义为

$$H^1 = \{f \in L^1(X) : f = \sum_j \lambda_j a_j, a_j \text{ 为 } (1, \infty) \text{ 原子}, \sum |\lambda_j| < \infty\},$$

$$\text{BMO} = \{f \in L^1_{\text{loc}}(X) : \sup_B \underline{}(B)^{-1} \int_B |f(x) - f_B| d\underline{}(x) < \infty\}, \text{ 其中 } f_B = \underline{}(B)^{-1} \int_B f(x)$$

* 国家自然科学基金 (19631080) 资助项目

收稿日期: 1996-09-02 李文明, 男, 33 岁, 博士, 现在河北师范大学数学系工作

$d_-(x)$, B 为 X 上的球. Coifman 与 Weiss^[2]证明了 $(H^1)' = \text{BMO}$.

给出齐型空间上 BMO 的光滑原子分解, 需要用到 M. Christ^[6] 的下列结果.

定理 1 设 $(X, d, _)$ 为齐型空间, 对于给定的 $W > 0$ 充分小, 存在开集族 $\{Q_r^k \subset X: k \in Z, T \in I_k\}$, 其中 I_k 表示依赖于 k 的指标集, 其可能是有限集, 以及正常数 a_0 与 C_0 使得

- (1) $_ (X \cup_T Q_r^k) = 0$, 对每个 $k \in Z$ 成立;
- (2) 如果 $\triangleright k$, 则 $Q_r^l \subset Q_r^k$ 或 $Q_r^l \cap Q_r^k = \emptyset$ 成立;
- (3) 对 (k, T) 及每个 $l < k$, 存在唯一的 T' 使得 $Q_r^l \subset Q_{r'}^k$;
- (4) Q_r^k 的直径小于或等于 $C_0 W$;
- (5) 每个 Q_r^k 包含某个球 $B(z_T^k, a_0 W)$.

称定理 1 中的 Q_r^k 为 X 中的第 k 代方体. 当不强调指标 $k \in Z, T \in I_k$ 时, 记 Q_r^k 为 Q . 另外易见 $_ (Q_r^k) \sim W$.

定义 2 设 $0 < W < 1, 0 < r < \theta$, 对定理 1 中的开集族 $\{Q_r^k \subset X: k \in Z, T \in I_k\}$, X 上的函数 $a_{Q_r^k}^r$ 称为是一个对应于 Q_r^k 的 r 阶光滑原子, 如果

- (1) $\text{Supp } a_{Q_r^k}^r \subseteq B(z_T^k, 3A C_0 W)$;
- (2) $\int a_{Q_r^k}^r(x) d_-(x) = 0$;
- (3) $|a_{Q_r^k}^r(x) - a_{Q_r^k}^r(x')| \leq _ (Q_r^k)^{-\frac{1}{2}-r} d(x, x')^r$, 且 $|a_{Q_r^k}^r(x)| \leq _ (Q_r^k)^{-\frac{1}{2}}$.

如 (1) 中. 本文的主要结果为下列两个定理.

定理 2 如果 $f \in \text{BMO}$, 则 $f = \sum_{k \in Z} \sum_{T \in I_k} \lambda_{Q_r^k} b_{Q_r^k}$,

其中, $b_{Q_r^k}$ 是对应于 Q_r^k 的 r 阶光滑原子, 式中系数满足: 存在常数 C , 对每个 Q_r^k 有

$$_ (Q_r^k)^{-1} \left(\sum_{I \subset Q_r^k} |\lambda_I|^2 \right) \leq C, I \text{ 是方体} \quad (1)$$

定理 3 设 $\{b_{Q_r^k}\} (k \in Z, T \in I_k)$ 是 r 阶光滑原子列, $\{\lambda_{Q_r^k}\}$ 是对每个 Q_r^k 满足 (1) 式的数列, 则 $f = \sum_{k \in Z} \sum_{T \in I_k} \lambda_{Q_r^k} b_{Q_r^k} \in \text{BMO}$.

2 定理的证明

根据齐型空间上的 Calderon 型再生公式. 对于 $x_0 \in X, \triangleright 0, 0 < \theta \leq 1$ 及 $r > 0$, 记 $_ (x_0, d, U, r)$ 为齐型空间上的检验函数空间^[4]. 对固定的 $x_0 \in X$, 简记 $_ (U, r) = _ (x_0, 1, U, r)$.

定义 3 算子族 $\{S_t\}_{t>0}$ 称为是一个恒等逼近, 如果存在 $0 < \theta \leq 1$ 与 $C > \infty$, 使得对任意的 $t > 0$ 以及对任意的 $x, x', y, y' \in X$, 算子 S_t 的核 $S_t(x, y)$ 满足

- (1) $|S_t(x, y)| \leq C [t^X / (t + d(x, y))^{1+X}]$;
- (2) $|S_t(x, y) - S_t(x', y)| + |S_t(y, x) - S_t(y, x')| \leq C [d(x, x') / (t + d(x, y))]^X [t^X / (t + d(x, y))^{1+X}]$, 对任意的 $d(x, x') \leq (t + d(x, y)) / 2A$ 成立;
- (3) $|[S_t(x, y) - S_t(x', y)] - [S_t(x', y) - S_t(x', y')]| \leq C d(x, x')^X d(y, y')^X [t^W / (t + d(x, y))^{1+2X+W}]$

其中, $0 < X < XW, X - X, d(x, x') \leq (t + d(x, y)) / 3A^2, d(y, y') \leq (t + d(x, y)) / 3A^2$;

(4) $\int S_t(x, y) d_-(x) = \int S_t(x, y) d_-(y) = 1$, 对任意的 $t > 0$ 成立.

定理 4^[4] 设 $\{S_t\}_{t>0}$ 是定义 3 中的恒等逼近, $D_t = t \, dS_t/dt$ 满足定义 3 中的 (1)~(3),

且 $\int D_t(x, y) d_-(x) = \int D_t(x, y) d_-(y) = 0$, 则存在算子族 $\{\tilde{D}_t\}_{t>0}$ 使得对所有的 $f \in (_-(U, r))'$, $0 < r, U < X$ 成立 $f = \int_0^\infty \tilde{D}_t \tilde{D}_t(f) \frac{dt}{t}$, 其中, 积分在 $(_-(U', r'))'$, $U' > U, r' > r$ 中收敛.

此外, 算子 $\tilde{D}_t$ 的核 $\tilde{D}_t(x, y)$ 满足: 对 $X, 0 < X < X$ 存在常数 C 使得

(1) $|\tilde{D}_t(x, y)| \leq C [t^X / (t + d(x, y))^{1+X}]$;

(2) $|\tilde{D}_t(x, y) - \tilde{D}_t(x', y)| \leq C [d(x, x') / (t + d(x, y))] [t^X / (t + d(x, y))^{1+X}]$, 只要 $d(x, x') \leq (t + d(x, y)) / 2A$;

(3) $\int \tilde{D}_t(x, y) d_-(x) = \int \tilde{D}_t(x, y) d_-(y) = 0$, 对任意的 $t > 0$ 成立.

这里取一个特殊的恒等逼近 $\{S_t\}_{t>0}$, 它的核满足当 $d(x, y) \geq t/(2A)$ 时 $S_t(x, y) = 0$.

定理 5 设 $0 < \theta \leq \theta, r > 0$, 则 $_-(x_0, d, U, r) \subset H^1$, 且对每个 $f \in _-(x_0, d, U, r)$, $\|f\|_{H^1} \leq C \|f\|_{_-(x_0, d, U, r)}$, 其中 C 不依赖于 f .

证明 只需证明对每个 $f(x) \in _-(x_0, d, U, r)$, $f(x)$ 可 $(1, \infty)$ 原子分解. 对 $d > 0$, 存在 $k_0 \in \mathbb{Z}$ 使得 $W_0 < d/(2AC_0) \leq W_0 + 1$, 其中常数 A 如定义 2, 为齐型空间定义^[4]中所涉及到的常数,

那么有 $f(x) = \sum_{T \in I_{k_0}} (f(x) - f_{Q_T^{k_0}}) \chi_{Q_T^{k_0}} = \sum_{T \in I_{k_0}} b_T(x)$. 对于 $T \in I_{k_0}$, 因为对任意的 $t, x \in Q_T^{k_0}$, d

$(x, t) \leq C_0 W_0 \leq (d + d(x_0, x)) / 2A$, 得

$$|b_T(x)| \leq (_-(Q_T^{k_0}))^{-1} \int_{Q_T^{k_0}} |f(x) - f(t)| d_-(t) \leq 2AC \|f\|_{_-(x_0, d, U, r)} [d^r / (d + d(x_T^{k_0}, x_0))^{1+r}],$$

令 $\lambda_{Q_T^{k_0}} = 2AC \|f\|_{_-(x_0, d, U, r)} (B(z_T^{k_0}, 3AC_0 W_0))^\circ [d^r / (d + d(z_T^{k_0}, x_0))^{1+r}]$,

$a_{Q_T^{k_0}}(x) = (\lambda_{Q_T^{k_0}})^{-1} b_T(x)$, 则 $f(x) = \sum_{T \in I_{k_0}} \lambda_{Q_T^{k_0}} a_{Q_T^{k_0}}(x)$.

容易验证 $a_{Q_T^{k_0}}$ 是 $(1, \infty)$ 原子, 而

$$\sum_{T \in I_{k_0}} |\lambda_{Q_T^{k_0}}| = 2A \|f\|_{_-(x_0, d, U, r)} \sum_{T \in I_{k_0}} (B(z_T^{k_0}, 3AC_0 W_0))^\circ [d^r / (d + d(z_T^{k_0}, x_0))^{1+r}] \leq$$

$2AC \|f\|_{_-(x_0, d, U, r)} \int_X \frac{d^r}{(d + d(x, x_0))^{1+r}} d_-(x) < \infty$, 且 $\|f\|_{H^1} \leq C \|f\|_{_-(x_0, d, U, r)}$. 定理得证.

现证定理 2. 由定理 5 可得 $\text{BMO} \subset (_-(U, r))'$, 故对 $f \in \text{BMO}$, 由定理 4 得

$$f = \int_0^\infty \tilde{D}_t \tilde{D}_t(f) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \int_X D_t(x, y) \tilde{D}_t(f)(y) \frac{dy dt}{t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{T \in I_k} \tilde{b}_{Q_T^k}$$

其中 $\tilde{b}_{Q_T^k}(x) = \iint_{Q_T^k} D_t(x, y) \tilde{D}_t(f)(y) \frac{dy dt}{t}$
 $\hat{Q}_T^k = \{(x, t): x \in Q_T^k, 3AC_0 W^* \leq t < 3AC_0 W^*\}.$

令 $T(Q_T^k) = \{(x, t): x \in Q_T^k, 0 < t < 3AC_0 W^*\}.$

显然 $\tilde{b}_{Q_T^k}$ 满足定义 2 的 (1), (2). 当 $x, x' \in X, x' \in Q_T^k$ 时有

$$|\tilde{b}_{Q_T^k}(x) - \tilde{b}_{Q_T^k}(x')| \leq \left[\iint_{\hat{Q}_T^k} |D_t(x, y) - D_t(x', y)|^2 \frac{dy dt}{t} \right]^{1/2} \left[\iint_{\hat{Q}_T^k} |\tilde{D}_t(f)(y)|^2 \frac{dy dt}{t} \right]^{1/2}$$

$$\leq C'_-(Q_r^k)^{1/2-r} d(x, x') \left(\iint_{Q_r^k} |\mathcal{D}_t(f)|^2 \frac{dy dt}{t} \right)^{1/2}, \quad 0 < r < X$$

$$\text{令 } \lambda_{Q_T^k} = C' \left(\iint_{Q_T^k} |\mathcal{D}_t(f)(y)|^2 \frac{dy dt}{t} \right)^{1/2}, b_{Q_T^k}(x) = \lambda_{Q_T^k}^{-1} \mathcal{D}_{Q_T^k}(x).$$

则 $b_{Q_T^k}(x)$ 满足定义 2 的 (3), 且 $f = \sum \lambda_{Q_T^k} b_{Q_T^k}$.

下证 (1) 式成立. 事实上, 对方体 Q_r^k , I 表示包含于 Q_r^k 中的任意方体, 则

$$\sum_{I \subset Q_T^k} |\lambda_I|^2 = C' \sum_{I \subset Q_T^k} \iint_I |\mathcal{D}_t(f)|^2 \frac{dy dt}{t} = C' \iint_{T(Q_T^k)} |\mathcal{D}_t(f)|^2 \frac{dy dt}{t}. \text{ 由于 } f \in \text{BMO}, \text{ 易证 } |\mathcal{D}_t(f)|^2 \frac{dy dt}{t} \text{ 是 } X \times R \text{ 上的一个 Carleson 测度, 故上式} \leq C \|f\|_{\text{BMO}^-(Q_r^k)}^2, \text{ 定理证毕.}$$

为证定理 3, 需要下列引理.

引理 1 设 $\{b_{Q_T^k}\}$ 与 $\{\lambda_{Q_T^k}\}$ 同定理 3, 则对任意方体 Q , 有

$$\| \sum_{\substack{I \subset Q \\ \text{是方体}}} \lambda_I b_I \| \leq C \left(\sum_{\substack{I \subset Q \\ \text{是方体}}} |\lambda_I|^2 \right)^{1/2},$$

其中, C 不依赖于方体 Q .

证明 对方体 I, J , 若 $\text{supp } b_I(x) \cap \text{supp } b_J(x) \neq \emptyset$, 取 $x \in \text{supp } b_I(x) \cap \text{supp } b_J(x)$, 则

$$\left| \int b_I(x) \overline{b_J(x)} d_-(x) \right| \leq \left| \int (b_I(x) - b_I(x_0)) \overline{b_J(x)} d_-(x) \right| \leq \int_{J_-} (I_-)^{-1/2-r} d(x, x_0)^r (J_-)^{-1/2} d_-(x) \leq C (J_- \perp (I_-))^{1/2-r}.$$

对方体 I 与整数 $k \geq 0$, 令 $\mathcal{A}_k(I)$ 表示方体 I 的所有满足 $\text{supp } b_I \cap \text{supp } b_J \neq \emptyset$ 的第 k 代子方体的集合, 则

$$\begin{aligned} \int \left| \sum_{I \subset Q} \lambda_I b_I(x) \right|^2 d_-(x) &= \int \left(\sum_{I \subset Q} \lambda_I b_I(x) \right) \overline{\left(\sum_{J \subset Q} \lambda_J b_J(x) \right)} d_-(x) \leq \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I \subset Q} (|\lambda_I| \sum_{J \in \mathcal{A}_k(I)} |\lambda_J| \cdot \left| \int b_I(x) \overline{b_J(x)} d_-(x) \right|) \leq \\ &C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I \subset Q} |\lambda_I| \sum_{J \in \mathcal{A}_k(I)} |\lambda_J| (J_- \perp (I_-))^{1/2-r}. \end{aligned}$$

注意到 $J \in \mathcal{A}_k(I)$, $J_- \perp (I_-) \leq C W$, 可得上式小于或等于下式左端且

$$\sum_{k=0}^{\infty} W^{(1/2-r)k} \left(\sum_{I \subset Q} |\lambda_I|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{I \subset Q} \sum_{J \in \mathcal{A}_k(I)} |\lambda_J|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} W^k \sum_{I \subset Q} |\lambda_I|^2 \right) \leq C \sum_{I \subset Q} |\lambda_I|^2.$$

定理 3 的证明. 令 $B = B(x_0, r)$ 为 X 中任意一个球, 则存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\omega W_1^+ \leq \omega W_1$. 对 $k_1 \in \mathbb{Z}$, 至多 $C \lfloor B \rfloor_{\omega W_1} = N$ 个第 k_1 代的方体 J 使得 $\text{supp } b_J \cap B \neq \emptyset$. 不失一般性, 设为 $\{Q^{k_1}\}$, $\# \leq N$.

$$\text{令 } f_1(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{I \subset Q^{k_1}} \lambda_I b_I(x), f_2(x) = \sum_{\substack{Q_T^k, k < k_1 \\ \text{且 } \text{supp } b_{Q_T^k} \cap B \neq \emptyset}} \lambda_{Q_T^k} b_{Q_T^k}(x),$$

$$f_3(x) = f(x) - f_1(x) - f_2(x).$$

显然 $f_3(x) = 0$ 当 $x \in B$ 时. 由引理 1 及 (1) 式可得

$$\int_B |f_1(x)|^2 d_-(x) \leq N \sum_{i=1}^N \int \left| \sum_{I \subset Q_i^{k_1}} \lambda_I b_I(x) \right|^2 d_-(x) \leq CN \sum_{i=1}^N \sum_{I \subset Q_i^{k_1}} |\lambda_I|^2 \leq C_-(B)$$

对 $x \in B$, 由 (1) 式得

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| \leq \sum_{\substack{Q_T^k, k < k_1 \\ \text{且 } \text{supp } b_{Q_T^k} \cap B \neq \emptyset}} |\lambda_{Q_T^k}| \cdot |b_{Q_T^k}(x) - b_{Q_T^k}(x_0)| \leq$$

$$C \sum_{\substack{Q_T^k, k < k_1 \\ \text{且 } \text{supp } b_{Q_T^k} \cap B \neq \emptyset}} (Q_T^k)^{1/2} (Q_T^k)^{-1/2-r} d(x, x_0)^r \leq C \frac{(B)}{a_0 W^{k_1}} \sum_{k=k_1-1}^{-\infty} W^{kr} \cdot \forall \leq C.$$

$$\text{故} \quad \int_B |f(x) - f_2(x_0)|^2 d_{-}(x) \leq \int_B |f_1(x)|^2 d_{-}(x) + \int_B |f_2(x) - f_2(x_0)|^2 d_{-}(x) \leq C_{-}(B).$$

因此 $f \in \text{BMO}$.

参 考 文 献

- 1 邓东皋, 韩永生. $\mathbb{H}$ 空间论. 北京: 北京大学出版社, 1992. 1~100
- 2 Coifman R R, Weiss G. Extension of Hardy spaces and their use in analysis. Bull Amer Math Soc, 1977, 83 (4): 569~645
- 3 杨乐, 龙瑞麟. 齐型空间上的 BMO 函数. 中国科学, 1984, A (4): 301~312
- 4 邓东皋, 韩永生. 齐型空间上的 Calderon 型再生公式. 中国科学, 1994, 24 (12): 1260~1269
- 5 Macias R A, Segovia C. Lipschitz function on spaces of homogeneous type. Adv Math, 1979, 33 (3): 257~270
- 6 Christ M. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. Colloq Math, 1990, 60/61: 601~628
- 7 Uchiyama A. A constructive proof of the Fefferman Stein decomposition of BMO. Acta Math, 1982, 148 (3): 215~241
- 8 Han Y-S, Sawyer E T. Littlewood-Paley theory on spaces of homogeneous type and the classical function spaces. Mem Amer Math Soc, 1994 (110): 1~126

The Atomic Decomposition for BMO on Spaces of Homogeneous Type

Li Wenming* Deng Donggao

Abstract Using the Calderon-type reproducing formula on spaces of homogeneous type, This paper obtains the smooth atomic decomposition for BMO on spaces of homogeneous type.

Keywords spaces of homogeneous type, BMO, atomic decomposition

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275