中山大学学报(自然科学版)
第35卷 第6期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Vol. 35 No. 6
1996年 11月 Nov. 1996

一类三维掠俘系统的定性分析*

王远世
(中山大学数学系,广州 510275)

摘 要 对一类两个捕食者和一个被食者组成的三维生态系统,采用构造三维空间中环域的方法,证明了系统的可接近周期解在坐标平面的某个区域上是稠密的.

关键词 Lotka-Volterra捕食被捕食系统,可接近周期解
分类号 O 175.12

McGehee从生态学的角度指出了研究二个捕食者和一个被食者组成的生态系统的重要性[1]之后,Freedman等先后对一类有二个捕食者及一个被食者的 Lotka-Volterra系统

$$\begin{cases} x' = x(A - y - Dz) \\ y' = y(-B + x + Ez) \\ z' = z(-C + Dx - Ey) \end{cases} \tag{1}$$

进行了讨论[2,3]. 1995年,George Seifert对(1)式作了进一步的研究[4],得出结论:当 $AE + C = DB$ 时,方程(1)的解除平衡点外全部是周期解;当 $AE + C \neq DB$ 时,则坐标平面 xy 或 xz 上的解除平衡点外全部是周期解.文[4]最后提出一个猜想:坐标平面上的每一个周期解都有另外一个解趋于它.

本文采用在三维空间中构造环域的方法,证明了具有这样特性的周期解在坐标平面上的某个区域上稠密,从而初步肯定地回答了文[4]的猜想.所采用的方法也较为新颖.

考虑方程(1),其中 A, B, C, D 均为正常数,E 为非负常数.易见当方程(1)的解的初值 $x(0), y(0), z(0)$ 均大于零时,解 $(x(t), y(t), z(t))$ 的各分量当 $t \geq 0$ 时均大于零.以下考虑的解,其初值都假设具有这样的性质.

1 $AE + C < DB$ 情形的几个引理

定义 方程(1)的一个周期解称为可接近的,如果存在(1)的另一个解,其轨道当 $t \to \infty$ 时趋于它.

引理 1[4] 如果 $AE + C = DB$,则(1)的所有非常数解都是周期解,且直线

$$\begin{cases} y + Dz = A \\ x + Ez = B \end{cases}$$

包含了(1)的除平衡点 O 之外的所有平衡点.

---

* 国家自然科学重点基金(19331060)资助项目

收稿日期: 1995-12-26 王远世,男,31岁,讲师

取 $x_0 = C/D$, $y_0 = 0$, $z_0 = A/D$, $\lambda = (AE + C)/DB$, 设 $(x(t), y(t), z(t))$ 是(1)的一个解, 作代换

$$x_1(t) = x(t) - x_0,\ x_2(t) = y(t) - y_0,\ x_3(t) = z(t) - z_0,$$

于是(1)变为

$$\begin{cases} x_1' = -Dx_0x_3 - x_0x_2 - Dx_1x_3 - x_1x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 + x_1x_2 + Ex_2x_3 \\ x_3' = Dz_0x_1 - Ez_0x_2 + Dx_1x_3 - Ex_2x_3 \end{cases} \tag{2}$$

令 $F(x_1) = x_1 - x_0\ln(x_1/x_0 + 1)$, $H(x_3) = x_3 - z_0\ln(x_3/z_0 + 1)$, $V(x_1, x_2, x_3) = F(x_1) + H(x_3) + x_2$

于是由(2)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\big|_{(2)} = \lambda x_2(t) \tag{3}$$

由(3)易知:

引理 2 (1)的平衡点 (x_0, y_0, z_0) 在 $R_+^3 = \{x > 0, y \geqslant 0, z > 0\}$ 内是全局稳定的.

引理 3[4] 对任意 $c > 0$, $V(x_1, x_2, x_3) = c$ 定义了一个有界闭且严格凸的二维曲面, 严格凸是指 (x_1, x_2, x_3) 空间的任一条直线与该曲面之交点最多只有两个.

引理 4[4] 设 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 是(1)的一个解, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} V(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = L_0$, 这里 $L_0 < +\infty$, $L_0 \geqslant 0$.

由引理 4易知(1)的任一解当 $t \geqslant 0$ 时有界.

引理 5[4] 如果(1)的周期解 $(\bar{x}_1(t), 0, \bar{x}_3(t))$ 被(1)的某个解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 接近, 设 $(\bar{x}_1(t), 0, \bar{x}_3(t))$ 的最小周期为 T, 则存在 τ, $0 < \tau < T$, 使得

$$(x_1(t) - \bar{x}_1(t+\tau))^2 + x_2^2(t) + (x_3(t) - \bar{x}_3(t+\tau))^2 \to 0,\ (t \to \infty)$$

引理 6 对方程(2)的任一解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t) = 0$

证明 如 $x_2(0) = 0$, 则由(2)可知, 当 $t \geqslant 0$ 时, $x_2(t) = 0$, 故不妨设 $x_2(0) > 0$, 由(3)可知 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t|_{(2)} < 0$, 而 $V(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = V(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) + \lambda\int_0^t x_2(s)\,\mathrm{d}s$, 故

$$-V(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \leqslant \lambda\int_0^t x_2(s)\,\mathrm{d}s \leqslant 0$$

即 $\int_0^{+\infty} x_2(s)\,\mathrm{d}s$ 有界, 即 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $T_0 > 0$, 有 $\int_T^{+\infty} x_2(s)\,\mathrm{d}s < \varepsilon$, 当 $T > T_0$ 时.

由 $\int_0^{+\infty} x_2(s)\,\mathrm{d}s$ 有界, 易知 $\varliminf\limits_{t\to+\infty} x_2(t) = 0$.

又由(2)的解的有界性, 知存在 $M > 0$, 使得 $|x_2'(t)| \leqslant M$, 对 $\forall\, t \geqslant 0$ 成立.

如果 $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} x_2(t) = c > 0$, 则存在序列 $\{t_n\}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} t_n = +\infty$, 使得 $\lim\limits_{m\to+\infty} x_2(t_n) = c$

由 $x_2(t)$ 的连续性及 $\int_0^{+\infty} x_2(t)\,\mathrm{d}t$ 的有界性知, 存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 必存在 t_n', t_n'', 使得 $t_{n-1} < t_n'' < t_n' < t_n$, 且 $x_2(t_n'') = c/3$, $x_2(t_n') = c/2$, 当 $t \in (t_n'', t_n')$ 时, $x_2(t) \geqslant c/3$.

由 $\int_0^{+\infty} x_2(s)\,\mathrm{d}s$ 有界亦知 $t_n' - t_n'' \to 0$, 当 $n \to \infty$ 时, 再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n' - t_n'') = 0$ 知存在 $N_2 > N_1 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, $t_n' - t_n'' < (c/2 - c/3)/M$.

取 $\varepsilon_0 = c^2/18M$, 必存在 $T_0 > t''_{N_2+1}$, 使得 $\int_{T_0}^{+\infty} x_2(s)\,\mathrm{d}s < \varepsilon_0$, 即有:

$$c/3(t_n' - t_n'') \leqslant \int_{t_n''}^{t_n'} x_2(s)\,\mathrm{d}s < \int_{T_0}^{+\infty} x_2(s)\,\mathrm{d}s < \varepsilon_0$$

所以, $c/3(t_n' - t_n'') \leqslant \varepsilon_0$, $(c/2 - c/3)/(t_n' - t_n'') > M$, 这与 $|x_2'(t)| \leqslant M$ 矛盾, 证毕.

为叙述方便, 引进以下记号:

设 $N>1$,记 $G_N=\{(x_1,0,x_3)|x_1>-x_0,x_3>-z_0|x_1+Ex_3|\leqslant-\frac{\lambda}{N},|x_1-Ex_3|\leqslant-\frac{\lambda}{N}\}$.由 $V(x_1,0,x_3)$的定正性及无穷小性,知对上述 G_N,必存在 $C_N>0$,使

$S_{C_N}=\{(x_1,0,x_3)|V(x_1,0,x_3)\leqslant C_N\}\subset G_N$ 且 $S_{C_N}\cap\partial G_N=\Phi$.

又记闭曲线 $L_C:\begin{cases}V(x_1,x_2,x_3)=c & \text{这里 } c>0\text{为常数}\\ x_2=0\end{cases}$

易见它是(2)的解,故是周期解.

说明 这里 C_N 不唯一,但可以尽量取大,使 S_{C_N}区域在 G_N 内尽量大,无论如何取 C_N,对以下的证明均无影响.

引理 7 对于上述 $C_N>0$,设(2)的解 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$,其初值满足 $V(x_1(0),x_2(0),x_3(0))=C_N$,则 $(x_1(t),0,x_3(t))\in S_{C_N}$, 当 $t\geqslant0$时.

证明 由(3)及 $x_2(t)>0$知,当 $t\geqslant0$时,

$$V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))\leqslant V(x_1(0),x_2(0),x_3(0))=C_N$$

$$V(x_1(t),0,x_3(t))\leqslant V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$$

故 $V(x_1(t),0,x_3(t))\leqslant C_N$ 对 $t\geqslant0$成立,即 $(x_1(t),0,x_3(t))\in S_{C_N}$,$\forall t\geqslant0$.

2 $AE+C<DB$ 情形的主要结果及证明

定理 1 在 x_1x_3平面上,至少存在(2)的一个周期解,它是可以被接近的.

证明 取 $N>(1+\sqrt{5})/2$,设解 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$满足 $V(x_1(0),x_2(0),x_3(0))=C_N$,这里 C_N 的取法见引言部分.

由 C_N 的取法知,必有 $|x_1(t)+Ex_3(t)|\leqslant-\frac{\lambda}{N}$,当 $t\geqslant0$时.故由(2)有

$$(1+\frac{1}{N})\lambda x_2\leqslant\frac{dx_2}{dt}\leqslant(1-\frac{1}{N})\lambda x_2,$$

$$x_2(0)e^{(1+\frac{1}{N})\lambda t}\leqslant x_2(t)\leqslant x_2(0)e^{(1-\frac{1}{N})\lambda t},$$

$$\lambda\int_0^t x_2(s)ds\leqslant\frac{N}{N+1}(e^{(1+\frac{1}{N})\lambda t}-1)x_2(0)\tag{4}$$

$$\lambda\int_0^t x_2(s)ds\geqslant\frac{N}{N-1}(e^{(1-\frac{1}{N})\lambda t}-1)x_2(0)\tag{5}$$

因为 $\lambda\int_0^t x_2(s)ds\geqslant x_2(0)\frac{N}{1-N}$

所以 $$V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))\geqslant F(x_1(0))+H(x_3(0))+x_2(0)\frac{1}{1-N}\tag{6}$$

取 $x_3(0)=0,x_2(0)=\frac{C_N}{N+1},F(x_1(0))=\frac{NC_N}{N+1}$,于是

$V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))\geqslant(N^2-N-1)/(N^2-1)>0.$

由(3)知 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))=c>0$,即周期解 L_c 可以被接近. 证毕.

由定理 1的证明过程知,可取 $N_1>(1+\sqrt{5})/2$及初值满足 $V(x_1(0),x_2(0),x_3(0))=C_{N_1}$的解 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(x_1(t),x_2(t),x_3(t))=c>0$.对于这个 c,由 $V(x_1,x_2,x_3)$的无穷小性知,可以取到 $N_2>N_1$,使 $G_{N_2}\subset S_c\subset G_{N_1}$,再由定理 1的证明过程知,可以取到初值满足 $V(\bar{x}_1(0),\bar{x}_2(0),\bar{x}_3(0))=C_{N_2}$的解 $(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\bar{x}_3(t))$,有

$$\lim_{t\to+\infty}V(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\bar{x}_3(t))=\bar{c}>0.$$

易见 $\bar{c}<c$,故 $L_{\bar{c}}$周期解也是可接近的,于是有:

定理 2 如果周期解 $L_{c_1}(c_1>0)$是可接近的,则必存在 c_2, $0<c_2<c_1$,周期解 L_{c_2}也是可接近的.

定理 2表明,存在一个收缩向平衡点的周期解序列,它们都是可接近的.进一步还有:

定理 3 如果 $L_{c_1}, L_{c_2}\subset G_N$,这里 $N>(1+\sqrt{5})/2$, L_{c_1}, L_{c_2}能被接近,那么必存在 $c>0$, $c_1<c<c_2$使得 L_c也是可接近的.

证明 任取 $\bar{c}>0$, $c_1<\bar{c}<c_2$,设解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$初值满足

$$V(x_1(0), x_2(0), x_3(0))=\bar{c},\ x_2(0)=(\bar{c}-c_1)(N-1)/(2N)$$

从式(5)可知:

$$V(x_1(t), x_2(t), x_2(t))\geqslant \bar{c}-\frac{N}{N-1}x_2(0)\geqslant \frac{\bar{c}+c_1}{2}>c_1$$

所以,设 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(x_1(t), x_2(t), x_3(t))=c$,则必有 $c_1<c<c_2$,证毕.

综合上述结果,有

定理 4 对任意的 $N>(1+\sqrt{5})/2$,以及相应的 S_{C_N}, (2)的可接近周期解的集合在 S_{C_N}中稠密.

3 $AE+C>DB$ 情形的主要结果

取 $x_0=B$, $y_0=A$, $z_0=0$,设 $(x(t), y(t), z(t))$是(1)的解,作代换 $x_1(t)=x(t)-x_0$, $x_2(t)=y(t)-y_0$, $x_3(t)=z(t)-z_0$,则(1)变为

$$\begin{cases} x_1'=-x_0x_2+Dx_0x_3-x_1x_2+Dx_1x_3 \\ x_2'=y_0x_1+Ey_0x_3+x_1x_2+Ex_2x_3 \\ x_3'=-\lambda Dx_3+Dx_1x_3-Ex_2x_3 \end{cases} \tag{7}$$

取 $V(x_1, x_2, x_3)=x_1-x_0\ln(x_1/x_0+1)+x_2-y_0\ln(x_2/y_0+1)+x_3$,又令 $N>(1+\sqrt{5})/2$,取

$$G_N=\{(x_1, x_2, 0)\mid x_1>-x_0,\ x_2>-y_0,\ |x_1-\frac{E}{D}x_2|\leqslant\frac{\lambda}{N},\ |x_1+\frac{E}{D}x_2|\leqslant\frac{\lambda}{N}\}$$

由 $V(x_1, 0, x_3)$的无穷小性知,可取到 $C_N>0$,使

$S_{C_N}=\{(x, x_2, 0)\mid V(x_1, x_2, 0)\leqslant C_N\}\subset G_N$ 且 $S_{C_N}\cap\partial G_N=\Phi$.于是,类似于情形 $AE+C<DB$,有

定理 5 对任意 $N>(1+\sqrt{5})/2$,以及相应的 S_{C_N}, xy平面上可接近周期解的集合必在 S_{C_N}上稠密.

致谢:作者感谢徐远通教授的热情指导.

参 考 文 献

1 McGehee R, Armstromg R A. Some mathematical problems concerning the ecological principal of competitive exclusion. J Diff Equ, 1977, 23 30~52

2 Freedman H I, Waltman P. Mathematical analysis of some threespecies food chain models. Math Biosc, 1977, 33 259~276

3 Freedman H I, Waltman P. Persistence in a model of three interacting predator-prey populations. Math Biosc. 1984, 68 213~231

4 George Seifert. A Lotka-Volterra predetor-Prey system involving two predators. Methods Appl Anal, 1995, 2 248~255

5 许淞庆.常微分方程稳定性理论.上海:上海科技出版社,1980. 72~89

A Lotka-Volterra System of One Prey and Two Predators

*Wang Yuanshi**

Abstract For a persistent system of two predators and one prey, the interesting results are obtained by constructing domains in R^3: there exist a number of periodic solutions which can be approached as $t \to \infty$. We also get the Hopf bifurcation of the system.

Keywords Lotka-Voterra predator-prey system, approachable solution

---

◦简 讯◦

《中山大学学报(自然科学版)》再度入选中文核心期刊

由北京大学图书馆、北京高校图书馆期刊工作研究会组织编写的《中文核心期刊要目总览(第二版)》最近出版,《中山大学学报(自然科学版)》再次被列入“N, T综合性科学技术类核心期刊”.

《总览》(第二版)在 1992年出版的第一版的基础上,将 1992~ 1994年国内出版的中文现刊作统计研究对象,进行初选(被索量统计、被摘量统计、被引量统计、载文量统计、被摘率统计和影响因子等)和综合筛选(初选结果构成矩阵以求隶属度,构成评价矩阵、加权平均和专家评审等),从 10 331种期刊中选出 1 578种为核心期刊,按《中国图书馆图书分类法》,分属 131个学科,覆盖文、理、医、农、工各大类.其中,“N, T综合性科学技术类”共有期刊 342种,列入该类核心期刊为 34种.

多年来,本刊坚持学术质量第一,立足本校优势,保持自己特色,积极为教学科研服务,坚持标准化规范化,提高编辑水平.近年来,在国家教委和全国高校学报的多次检查评比中,均获得较好的声誉.本刊还入选中国自然科学核心期刊研究课题组公布的“中国自然科学核心期刊”,和中国科学院文献情报中心的“中国科学引文数据库综合类核心期刊”.

(芊 子)

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275