中山大学学报 (自然科学版)
第 36卷 第 6期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 36 No. 6
1997年 11月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 1997

广义各向异性流的渐近性态[20]

傅小勇
(中山大学数学系 ,广州 510275)

摘 要 对按曲线流 $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = V(\theta, k)\vec{N}$ 演化着的平面光滑简单闭凸曲线给出了 1个等周估计 . 由此结合尺度论证法得到平面光滑简单闭凸曲线在上述曲线流下的渐近性态.

关键词 各向异性流 ,渐近性态 ,等周估计 ,尺度论证法
分类号 O 175. 26

考虑方程

$$\frac{\partial N}{\partial t} = V(\theta, k)\vec{N} \tag{1}$$

其中 ,V: $[0, t_{max}) \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ 为平面凸曲线; V: $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是切向角 θ 和曲率 k 的光滑函数 ,$\vec{N}$ 是内法向量 .

若初始曲线 V_0 光滑且 V 满足 $0 < \lambda \leqslant \frac{\partial V}{\partial k} \leqslant \lambda^{-1}$ 对所有 $(\theta, k) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ 成立 ,则方程 (1) 存在唯一极大解 $V(t, u)$: $[0, t_{max}] \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ 且 $V(0, u) = V_0$[1]. 若 $t_{max} < +\infty$ 且 V 还满足 $V(\theta + c, -k) = -V(\theta, k)$,则当 $t \to t_{max}$ 时 ,$V(t, u)$ 收缩成 1点[2].

接下来的问题自然是考虑解的渐近性态 ,本文证明了下述定理 .

定理 假设 V 是光滑函数 ,满足

1) $0 < \lambda \leqslant \frac{\partial V}{\partial k} \leqslant \lambda^{-1}$;

2) $V(\theta + \pi, -k) = -V(\theta, k)$;

3) $\exists\, \bar{V}(\theta)$, s. t. $|V(\theta, k) - \bar{V}(\theta)k| \leqslant C(1 + k^{T})$ 其中 ,$C > 0, 0 < T < 1$.

命 V_0: $S^1 \to \mathbb{R}^2$ 是光滑凸曲线 , $V(t, u) = [0, t_{max}) \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ 是方程 (1) 的以 V_0 为初值的极大解 . 则当 $t \to t_{max}$ 时 ,$\tilde{V}(t) = \frac{V(t)}{\sqrt{2(t_{max} - t)}}$ 收敛到由 $\bar{V}(\theta)$ 所确定的等周体 (定义见 3渐近性态) .

1 预备知识

本节证明方程 (1) 保持曲线的凸性 ,且极限曲线是 1个点 .

命题 1 假设 V_0: $S^1 \to \mathbb{R}^2$ 为光滑凸曲线 , V 满足假设 1) , 2) ,则方程 (1) 适合 $V(0, u) = V_0$ 的极大解 $V(t, u)$: $[0, t_{max}) \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ 对所有的 t 都是凸曲线 ,且当 $t \to t_{max}$ 时 ,$V(t)$ 收缩成

[20] 收稿日期: 1997-03-28 傅小勇 ,男 , 27岁 ,博士研究生

1个点.

证明　将抛物方程的极大值原理用于曲率 k 的发展方程

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + k^2 V$$

其中,s 是弧长参数,可知 $V(t)$ 是凸曲线;通过考虑长度 $L(V(t))$ 的发展方程

$$\frac{dL}{dt} = -\int_V V(\theta, k) k \, ds$$

知 $L^2(t) \leqslant L^2(0) - 8\pi^2 \lambda t$.从而 $t_{\max} < +\infty$,$V(t)$收缩成 1点.

2 等周估计

设 V是 1凸曲线,Λ 是 1直线段,Λ 将 V所围区域 D 分成两部分 D_1, D_2.考虑量

$$G(\Lambda) = L^2\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)$$

其中,L 是 Λ 的长度,A_i 是 D_i 的面积($i = 1, 2$).定义

$$\overline{G} = \inf_{\Lambda} G(\Lambda)$$

引理 1[3]　$G(\Lambda)$的下确界可为 K^0中的元素所达到.其中,$K^0 = \{\Lambda |$ 直线段,且与 V仅横截相交于 Λ的端点$\}$.

不失一般性,设 Λ 是竖直的,且位于直线 $x = \bar{x}$ 上,则 V在 Λ 的顶端附近可视作函数 $y_+ = y_+(x)$的图像 Δ_+,在 Λ 的底端附近可视作 $y_- = y_-(x)$的图像 Δ_-.令 $j_\pm$ 为 $\Delta_\pm$ 在 $x = \bar{x}$ 处的切向角,$k_\pm$ 是 $\Delta_\pm$ 在 $x = \bar{x}$ 处的曲率.假设 Δ_+ 的切线位于水平线上方,Δ_- 的切线位于水平线下方.则容易证明引理 2.

引理 2　$j_+ = j_- \overset{\text{记作}}{=\!=} j$

$$\tan j = \frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) - \frac{2}{L}(k_+ + k_-)\sec j \geqslant -\frac{2L^2 / A_1 A_2}{1 + \tan^2 j} \geqslant -\frac{2L^2}{A_1 A_2}.$$

命题 2　假设 V满足(1)式,其中 V 适合 1)~3).若 V_0为光滑凸曲线,则存在常数 $W > 0$,使得

$$\overline{G}(t) \geqslant W > 0, \text{对所有的 } t \in [0, t_{\max}) \text{成立}$$

证明　固定 $t_0 \in [0, t_{\max})$,令 $G(\Lambda(t_0)) = \inf_{\Lambda} G(\Lambda(x, t_0)) = \overline{G}(t_0)$.

设 t 是靠近 t_0的时刻,选取 $\Lambda(x, t)$为 $\Lambda = \Lambda(t_0)$所在直线上的线段,使得 $\Lambda(x, t)$将 $V(t, \cdot)$所围区域 D 分成 2部分,则在 $t = t_0$处有

$$\frac{d}{dt}\ln G = -\frac{2}{L}\sec j\,(V(-j, k_-) - V(j, -k_+)) + \frac{1}{A_1}\int_{V_1(t_0)} V(\theta, k)\, ds +$$

$$\frac{1}{A_2}\int_{V_2(t_0)} V(\theta, k)\, ds - \frac{1}{A}\int_{V(t_0)} V(\theta, k)\, ds \geqslant$$

$$-\frac{2\lambda^{-1}}{L}(k_+ + k_-)\sec j - \frac{2\sec j}{L}(V(-j, 0) - V(j, 0)) +$$

$$\frac{A_2^2}{A_1 A_2 (A_1 + A_2)}\int_{V_1(t_0)} V(\theta, k)\, ds + \frac{A_1^2}{A_1 A_2 (A_1 + A_2)}\int_{V_2(t_0)} V(\theta, k)\, ds$$

由于　$\forall X > 0, \exists C_X > 0, \text{s.t. } V(\theta, k) \geqslant (\overline{V}(\theta) - X)k - C_X$.

因此

$$\int_{V_1(t_0)} V(\theta, k)\, ds \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{V}(\theta)\, d\theta - \max_\theta \overline{V}(\theta) \cdot 2j - X(\pi - 2j) - C_X L(V_1(t_0))$$

$$\int_{V_2(t_0)} V(\theta,k)\,ds \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \bar{V}(\theta)\,d\theta - \max_\theta \bar{V}(\theta)\cdot(2j - X(\pi + 2j)) - C_1 L(V_2(t_0))$$

于是

$$\frac{d}{dt}\ln G\Big|_{t=t_0} \geqslant -\lambda^{-1}\frac{2L^2}{A_1A_2} - \frac{2C_1}{L}2j\sec j + \frac{1}{2}\frac{A_1^2 + A_2^2}{A_1A_2(A_1+A_2)}\int_0^{2\pi}\bar{V}(\theta)\,d\theta -$$
$$C_2\frac{A_1^2+A_2^2}{A_1A_2(A_1+A_2)}(2j + L(V)) \geqslant -C\left[\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)(\bar{G} + L(V))\right] +$$
$$\frac{1}{2}\frac{A_1^2+A_2^2}{A_1A_2(A_1+A_2)}\left[2\pi\lambda - C_2L^2\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right) - 2C_2L(V)\right] \geqslant$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)\left[2\pi\lambda - (2C_2 + 4C)(\bar{G} + L(V))\right]$$

只要 $2\pi\lambda - 2C_2(\bar{G} + L(V)) \geqslant 0$,即 $\bar{G} + L(V) \leqslant \pi\lambda/C_2$,从而存在只依赖于 λ 和初始曲线的常数 $_{0} > 0$使得在 $t = t_0$处,只要 $L(V(t_0)) \leqslant \_{0}$, $\bar{G}(t_0) \leqslant \_{0}$,便有$\frac{d}{dt}\ln G > 0$.注意到当 $t \to t_{max}$时,曲线收缩成 1点,因此

$$\bar{G}(t) \geqslant \frac{1}{2}\min\{\bar{G}(0), \_{0}\}, \forall t \in [0, t_{max}).$$

证完.

假设 $V(t,u)$: $[0,t_{max}) \times S^1 \to \mathbb{R}^2$是方程(1)的极大解,其中 V 满足假设 1)~ 3).因为 $t_{max} < +\infty$,因此当 $t \to t_{max}$时,曲率 k 的最大模必定爆破,从而存在 1列点 $(t_n, u_n) \in (0, t_{max}) \times S^1$使得 $t_n \uparrow t_{max}$且

$$|k(t,u)| \leqslant |k(t_n,u_n)| \quad (0 < t < t_n, u \in S^1) \quad \text{对所有的 } n \text{ 都成立}.$$

令 $X_n = |k(t_n,u_n)|^{-1}$,定义

$$V_n(t,u) = \frac{1}{X_n}V(t_n + X_n^2 t, u): \left[\frac{-t_n}{X_n^2}, \frac{(t_{max} - t_n)}{X_n^2}\right) \times S^1 \to \mathbb{R}^2$$

利用标准的尺度论证法, Angenent证明了 V_n沿 $\{(t_n,u_n)\}$的 1个子列收敛到 1族完备曲线 V_∞: $(-\infty, 0] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$且 $V_\infty(t,u)$是方程

$$\frac{\partial V_\infty}{\partial t} = W(\theta, k_\infty)\vec{N}$$

的古典解,其中 W 满足与假设 1)~ 2)类似的性质. k_∞是 $V_\infty(t,u)$的曲率. $|k_\infty(t,u)| \leqslant 1$.利用等周估计可证到下面引理 3.

引理 3① 对所有的 $t \in (-\infty, 0]$, $V_\infty(t,u)$紧.

3 渐近性态

设 $V(t,u)$: $[0,t_{max}) \times S^1 \to \mathbb{R}^2$是一族凸曲线,满足方程(1),其中 $V(\theta,k)$适合条件 1)~ 3).由于 $\bar{V}(\theta + \pi) = \bar{V}(\theta)$,因此

$$\bar{V}(\theta) = \bar{h}(\theta)/\bar{k}(\theta)$$

其中, $\bar{h}$, $\bar{k}$ 分别为某条光滑、对称、严格凸曲线 $\mathscr{T}$ 的支撑函数和曲率,且 $\mathscr{T}$ 在相差一个伸

① Zhu X P. Asymptotic Behaviour of anisotropic Curve flows. J Differential Geom. (待发表)

缩变换下唯一确定[4, 5]. $\mathscr{T}$ 称为由 $\bar V(\theta)$所确定的等周体.

令 $$\tilde V(t,u)=\frac{V(t,u)}{2(t_{max}-t)}$$

则 $\tilde V$的曲率和所围成的面积分别为

$$\tilde k(t,u)=\sqrt{2(t_{max}-t)}\,k(t,u)$$

$$\tilde A(t)=\frac{1}{2(t_{max}-t)}\int_t^{t_{max}}\left(\int_{V(f,u)}V(\theta,k)\,ds\right)\,df$$

由于 $$(\bar V(\theta)-X)k-C^X\leqslant V(\theta,k)\leqslant(\bar V(\theta)+X)k+C^X$$

因此 $$0<\lambda\pi\leqslant\tilde A(t)\leqslant\lambda^{-1}\pi$$

引理 4 存在正常数 $W>0$,使得 $0<W\leqslant\tilde k\leqslant W^{-1}<+\infty$.

证明 用反证法. 考虑 V沿 $\{(t_n,u_n)\}$作尺度变换后所得的解,并利用引理 3可证得.

注意到

$$V=V(\theta,k)=V(\theta,k(\theta,t))=V(\theta,t)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}\Big|_\theta=k^2(V_{\theta\theta}+V)$$

其中, $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_\theta$ 表示固定 θ 对 t 求偏导,因此

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_\theta=\frac{\partial V}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial t}=\left(k^2\frac{\partial V}{\partial k}\right)(V_{\theta\theta}+V)$$

仿照文 [6]利用 Sturm比较定理可证引理 5.

引理 5 假设 $k(\theta,0)<0$,且对所有的 θ, $(V^2+V_\theta^2)(\theta,0)\leqslant M^2$,则对所有 (θ,t)成立

$$V^2+V_\theta^2\leqslant\max\{M^2,\_^2\}\text{或 }V_{\theta\theta}+V\geqslant 0.$$

引理 6 (梯度估计). $\forall t\in[0,t_{max})$,

$$\|V_\theta(\theta,t)\|_{L^\infty}\leqslant M+(1+2\pi)\_+2\pi\lambda^{-1}k_{max}(t)$$

$$\left\|\frac{\partial k}{\partial\theta}\right\|_{L^\infty}\leqslant\lambda^{-1}\left[\left\|\frac{\partial V}{\partial\theta}\right\|_{L^\infty}+M+(1+2\pi)\_+2\pi\lambda^{-1}k_{max}(t)\right]$$

$$\left\|\frac{\partial\tilde k}{\partial\theta}\right\|_{L^\infty}\leqslant C.$$

令 $$f=-\frac{1}{2}\ln\frac{t_{max}-t}{t_{max}},\ f\in[0,+\infty)$$

则支撑函数 $\tilde h=\tilde h(f,\theta)$满足

$$\frac{\partial\tilde h}{\partial f}=\tilde h-\sqrt{2t_{max}}\,e^{-f}V\left(\theta,\frac{e^f}{\sqrt{2t_{max}}}\tilde k\right)$$

由于 $\tilde k\geqslant W>0$,故可设

$$\sqrt{2t_{max}}\,e^{-f}V\left(\theta,\frac{e^f}{\sqrt{2t_{max}}}\tilde k\right)\geqslant k_0>0$$

由此推知 $\tilde h\geqslant k_0/2$.

考虑泛函

$$J(f)=\int_0^{2c}\left(\tilde h_\theta^2-\tilde h^2+2\bar V(\theta)\ln\tilde h+\Lambda(2t_{max})^{1-T}e^{-2f(1-T)}\right)d\theta$$

其中 Λ 是待定常数. 直接计算可得

$$\frac{dJ(f)}{df} = -\int_0^{2c}\left[\frac{1}{hk}(Vk - h)\left(2t_{\max} e^{-f} V\left(\theta, \frac{e^f k}{2t_{\max}}\right) - h\right)\right] d\theta -$$
$$4(1-T)\Lambda(2t_{\max})^{1-T} e^{-2f(1-T)} \cdot 2c \leqslant \int_0^{2c} \frac{1}{hk}(Vk-h)^2 d\theta +$$
$$\int_0^{2c}\left(\frac{1}{hk}C^2(2t_{\max})^{1-T}e^{-2f(1-T)}k^{2T}\right) d\theta - 8c(1-T)\Lambda(2t_{\max})^{1-T}e^{-2f(1-T)}$$

由于 $h \geqslant k_0/2$, $0 < W \leqslant k \leqslant W^{-1}$,因此对足够大的 Λ,有

$$\frac{dJ(f)}{df} \leqslant -\int_0^{2c}\frac{1}{hk}(Vk-h)^2 d\theta \leqslant 0$$

注意到 $J(f)$下方有界,从而 $\lim_{f\to\infty}\frac{dJ(f)}{df} = 0$,于是 $V(f)$收敛到由 $V(\theta)$所确定的等周体.

致谢 作者衷心感谢导师朱熹平教授的热心指导和帮助.

参 考 文 献

1 Angenent S. Parabolic equations for curves on surfaces I, curves with p-integrable curvature. Ann Math, 1990, 132: 451～483

2 Oaks J A. Singularities and self-intersections of curves on surfaces. Indiana Univ Math J, 1994, 43: 959～981

3 Hamilton R. Isoperimetric estimates for the curve shrinking flow in the plane. In: Bloom T. Annals of Math Studies. Princeton: Princeton Univ Press. 1995, 201～222

4 Gage M. Evolving Plane curves by Curvature in relative geometries. Duke Math J, 1993, 72: 441～466

5 Gage M, Li Y. Evolving plane curves by curvature in relative geometries Ⅱ. Duke Math. J, 1994, 75: 79～98

6 Angenent S. On the formation of singularities in the curve shrinking flow. J Differential Geom, 1991, 33: 601～633

Asymptotic Behaviour of a Class of Generalized Anisotropic Flow

Fu Xiaoyong※

Abstract Presents an isoperimetric estimate for the simple closed convex plane curves evolving according to the flow $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = V(\theta, k)\vec{N}$. Moreover, by combining the estimate with the rescaling argument, obtains the asymptotic behaviour of the flow with initial simple closed convex curves.

Keywords anisotropic flow, asymptotic behaviour, isoperimetric estimate, rescaling argument

※ Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275