

广义 Gottlieb 集的提升

代雄平

(中山大学 科学计算与计算机应用系, 广州 510275)

摘 要 映射 $p: E_\theta \rightarrow X$ 是由 $\theta: X \rightarrow B$ 诱导出的主纤维化, $g: A \rightarrow X$ 是一个 v -循环的映射,

这里 $v: X \rightarrow X$ 是一映射, 若映射 $\bar{v}: E \rightarrow E_\theta$ 和映射 $\bar{p}: E \rightarrow X$ 满足 $p \circ \bar{v} = v \circ \bar{p}$. 给出在一般条件下 $g: A \rightarrow X$ 存在 v -循环的提升的充要条件.

关键词 循环映射, 广义 Gottlieb 集, 主纤维化和拉回

分类号 O 189. 23

约定以下所考虑的空间和映射是属于点标 CW -复形的同伦范畴, 对一给定映射 $v: X \rightarrow X$, 称 $g: A \rightarrow X$ 是 v -循环映射, 若存在以 v 和 g 为轴的配对 $H: X \times A \rightarrow X$ 满足 $H_j \simeq 5(v \vee g)$. 这里 $j: X \vee A \rightarrow X \times A$ 是包含映射, $5: X \vee X \rightarrow X$ 是折叠映射. 记 $v^\perp(A, X) = \{f \in [A, X] \mid f \text{ 是 } v\text{-循环的}\}$, $v^\perp(A, X)$ 被称为是 X 的 $(v; A)$ -广义 Gottlieb 集^[1], 当 $v = 1_X$, $A = S^n$ 时, $v^\perp(S^n, X) = G_n(X)$, 即 n 维同伦群的赋值子群^[2]. 设 $p: E_\theta \rightarrow X$ 是由 $\theta: X \rightarrow B$ 诱导出的主纤维化; $v: X \rightarrow X$, $\bar{v}: E \rightarrow E_\theta$ 和 $\bar{p}: E \rightarrow X$ 满足 $v\bar{p} \simeq p\bar{v}$. 若有 $g \in v^\perp(A, X)$, 即存在 $H: X \times A \rightarrow X$ 满足 $H_j \simeq 5(v \vee g)$, 我们想知道是否存在提升 $\bar{g}: A \rightarrow E_\theta$ 满足 $\bar{g} \in \bar{v}^\perp(A, E_\theta)$, 也即存在配对 $H: E \times A \rightarrow E_\theta$ 满足 $H|_E \simeq \bar{v}$ 且 $pH \simeq H(\bar{p} \times 1)$, Gottlieb^[3, 4], Habhavi 和 Varadarajan^[5], Hoo^[6] 在 B 是 H -空间以及 $v = 1_X$ 的条件下给出了一些充要条件, Yeso Soo Yoon^[7] 给出在 B 为一般空间以及 $v = 1_X$ 的条件下的充要条件, 本文在文献 [7] 的基础上, 改进其证明方法, 给出了在一般空间以及任意 v 下的充要条件, 并将其结果概括为此充要条件的推论.

再约定一些符号和术语: ① 折叠映射 $5: X \vee X \rightarrow X$ 由 $5(x, *) = 5(*, x) = x$, 对 $\forall x \in X$ 来定义; ② EX 和 KX 分别表示约化的同纬映象和回路空间; ③ 伴随函子 $f: [EX, Y] \rightarrow [X, KY]$; ④ $e_A = f^{-1}(1_{KA}: EK_A \rightarrow A, e_A = f(1_{EA}): A \rightarrow KE_A)$. 另外, 由文献 [8] 可知, 若 B 是一个 H -空间, 则存在映射 $r': KE_B \rightarrow B$ 使得 $r'e'_B \sim 1_B$.

1 提升定理

给定映射 $v: X \rightarrow X$, $\bar{v}: E \rightarrow E_\theta$, $\bar{p}: E \rightarrow X$ 和 $p: E_\theta \rightarrow X$, 其中 $p: E_\theta \rightarrow X$ 是由映射 $\theta: X \rightarrow B$ 诱导出的主纤维化, 若 $X \times PB \rightarrow B$ 表示赋值映射, 即 $X(k) = k(1)$ (k 是 B 中以基点 $*$ 为起点的道路). 则 E_θ 是 $\theta: X \rightarrow B$ 和 $X \times PB \rightarrow B$ 的拉回 (图 1).

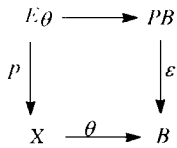


图 1 拉回

Fig. 1 Pull - back

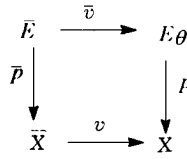


图 2 同伦交换方块

Fig. 2 Homotopic commutative block

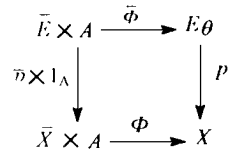


图 3 同伦提升

Fig. 3 Homotopy lifting

这里 $E_\theta = \{(x, k) \in X \times PB \mid \theta(x) = X(k)\}$, $p(x, w) = x$.

下面两个引理将充当重要角色.

引理 1^[7] 一个映射 $g: A \rightarrow X$ 能提升至 $A \rightarrow E_\theta$ 当且仅当 $\theta g \simeq *$.

引理 2^[7] 给定映射 $g^k: A_k \rightarrow E_\theta$, $k = 1, 2$, 若存在 $g: A_1 \times A_2 \rightarrow E_\theta$ 满足 $pg|_{A_k} \simeq pg^k$, $k = 1, 2$, 则有映射 $h: A_1 \times A_2 \rightarrow E_\theta$ 满足 $ph = pg$ 且 $h|_{A_k} \simeq g^k$, $k = 1, 2$.

若 $p\bar{v} \simeq v\bar{p}$, 即有同伦交换如图 2. 现在考虑 $g \in v^\perp(A, X)$ 存在 $\bar{v}$ -循环提升的条件.

定理 1 设 $g: A \rightarrow X$ 是 v -循环的, 即存在配对 $H: X \times A \rightarrow X$ 满足 $Hj \simeq 5(v \vee g)$. 则存在映射 $H: E \times A \rightarrow E_\theta$ 满足 $H|_E \simeq \bar{v}$ 且图 3 同伦交换, 当且仅当 $\theta H(p \times 1_A) \simeq *$.

证明 若 $\theta H(p \times 1_A) \simeq *$, 由引理 1 知存在 $H: E \times A \rightarrow E_\theta$ 满足 $pH' \simeq H(\bar{p} \times 1_A)$, 则 $pH|_E \simeq H'(\bar{p} \times 1_A)|_E = v\bar{p} \simeq p\bar{v}$. 由引理 2 知存在 $H: E \times A \rightarrow E_\theta$ 满足 $H|_E \simeq \bar{v}$ 和 $pH \simeq H(\bar{p} \times 1_A)$.

反之, 若存在所需 $H: E \times A \rightarrow E_\theta$, 由引理 1 知 $\theta H(p \times 1_A) \simeq *$. 证毕.

在上述提升定理中, 所得 H 虽然只是满足 $H|_E \simeq \bar{v}$, 但由广义 Gottlieb 集的性质可知 $(H|_E)^\perp(A, E_\theta)$ 与 $\bar{v}^\perp(A, E_\theta)$ 是相等的.

易见文 [7] 的主要定理 2.3 即为定理 1 中 $v = 1_X$, $\bar{v} = 1_{E_\theta}$ 且 $\bar{p} = p$ 的情形.

2 提升定理的应用

当 B 是 H -空间时, 应用定理 1 得到提升定理的另一等价形式, 进而可利用这个等价定理推出 Halbhavi 和 Varadarajan 以及 Hoo 等人的有关结果.

首先考虑同伦交换图 4. 图 4 中 $\bar{p}'$ 是由 $\bar{p} \times 1_A$ 诱导出的, 序列是 Puppe Co-纤维化序列.

定理 2 设 B 是 H -空间, $g: A \rightarrow X$ 是 v -循环映射, 即存在映射 $H: X \times A \rightarrow X$ 满足 $Hj \simeq 5(v \vee g)$. 则存在一个映射 $H: E \times A \rightarrow E_\theta$ 满足 $pH \simeq H(\bar{p} \times 1_A)$ 和 $H|_E \simeq \bar{v}$ 当且仅当 $E(\theta H)q\bar{p}' \simeq *$.

证明 由定理 1 知满足题设的 H 存在的充要条件是 $\theta H(p \times 1_A) \simeq *$. 故只需证明 $E(\theta H)q\bar{p}' \simeq *$ 当且仅当 $\theta H(p \times 1_A) \simeq *$.

若 $\theta H(p \times 1_A) \simeq *$, 则 $E(\theta H)E(\bar{p} \times 1_A) \simeq *$, 由图 4 知 $E(\theta H)q\bar{p}' \simeq *$. 反之, 若 $E(\theta H)q\bar{p}' \simeq *$, 也即 $E((\theta H)(\bar{p} \times 1_A))^{q'} \simeq *$, 则可找到一个映射 $E(E \times CA) \rightarrow EB$, 它扩张了 $E((\theta H)(\bar{p} \times 1_A))$; $E(E \times A) \rightarrow EB$. 取其伴随得到一个映射 $\bar{E} \times CA \rightarrow KEB$, 它扩张了映射 $e'_B: E(\theta H)(\bar{p} \times 1_A): E$

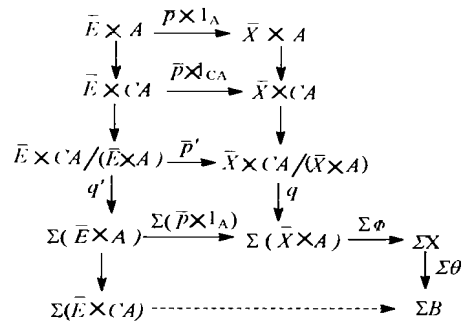


图 4 同伦交换映射

Fig. 4 Homotopic commutative maps

$\times A \rightarrow B \rightarrow \text{KE}B$. 这里 $e'_B: B \rightarrow \text{KE}B$ 由 $e'_B(b)(t) = [b, t]$ 定义, 因为 B 是 H -空间, 我们可以找到一个弱收缩 $r: \text{KE}B \rightarrow B$. 即 $r e'_B \simeq 1_B$. 因此现有映射 $E \times CA \rightarrow B$ 扩张 $\theta H(\bar{p} \times 1_A)$, 这意味着可以找到一个映射 $F: E \times A \times I \rightarrow B$ 满足

$$F(\bar{e}, a, 1) = \theta H(\bar{p}(\bar{e}), a) = \theta H(\bar{p} \times 1_A)(\bar{e}, a);$$

$$F(\bar{e}, a, 0) = \theta H \bar{p}(\bar{e}) = \theta p \bar{v}(\bar{e}). \text{ 这里 } \bar{e} \in E, a \in A, \{0, 1\} \subset I.$$

所以, $\theta H(\bar{p} \times 1_A) \simeq \theta p \bar{v} \simeq *$. 证毕.

用定理 2 可得到推论 1, 它是 Hoo 定理 1^[6] 的第二部份的推广.

推论 1 设 $B = KD$, D 是 1-连通的, 若有 $H: X \times A \rightarrow X$ 是以 $v: X \rightarrow X$ 和 $g: A \rightarrow X$ 为轴的配对, 则存在 $H: E \times A \rightarrow E$ 满足 $H|E \simeq \bar{v}$ 和 $pH \simeq H(\bar{p} \times 1_A)$ 当且仅当 $f^{-1}(\theta)(EH)q\bar{p}' \simeq *$.

证明 因为 $f^{-1}(\theta) = e_0 E_0$ (这里 $e_0 = f^{-1}(1_{KD})$), 所以, $f^{-1}(\theta)(EH)q\bar{p}' \simeq *$ 当且仅当 $e_0 E_0 EHq\bar{p} \simeq *$.

由定理 2 知, 若存在满足题设的 H , 则必有 $E(\theta H)q\bar{p}' \simeq *$, 进而 $e_0(E_0)(E(H)q\bar{p}') \simeq *$. 反之, 若 $f^{-1}(\theta)EHq\bar{p}' \simeq *$, 即 $e_0 E_0 EHq\bar{p}' \simeq *$, 由图 4 的交换性知 $e_0 E_0 EHE(\bar{p} \times 1_A)q' \simeq *$. 则有映射 $E(E \times CA) \rightarrow D$, 它扩张了映射 $e_0 E_0 EHE(\bar{p} \times 1_A): E(E \times A) \rightarrow EKD \rightarrow D$. 取其伴随得到一个映射 $E \times CA \rightarrow KD$, 它扩张了 $f(e_0 E_0 EHE(\bar{p} \times 1_A)) = \theta H(\bar{p} \times 1_A): E \times A \rightarrow KD$, 所以 $\theta H(\bar{p} \times 1_A) \simeq *$. 由定理 2 知满足题设的 H 存在. 证毕.

现考虑 $B = \prod_{j \in J} K(\zeta_j, n_j)$ ($n_j \geq 1$, ζ_j 是交换群) 的情况. 设 $p_j: B \rightarrow k(\zeta_j, n_j)$ 是投射, 记 $\theta_j = p_j \theta: X \rightarrow B \rightarrow K(\zeta_j, n_j)$, $l_j \in H^{n_j}(K(\zeta_j, n_j); \zeta_j)$ 是基类, 这时 $B = KD$, 其中 $D = \prod_{j \in J} K(\zeta_j, n_j + 1)$. 对 $\theta: X \rightarrow B = KD$ 取其伴随得 $f^{-1}(\theta): EX \rightarrow D$. 记 $q_j: D \rightarrow K(\zeta_j, n_j + 1)$ 是投射, $l_j \in H^{n_j+1}(K(\zeta_j, n_j + 1); \zeta_j)$ 是基类, 以下推论 2 是 Halbhavi 和 Varadarajan 定理 2.1^[5] 的推广.

推论 2 存在 $H: E \times A \rightarrow E$ 满足 $H|E \simeq \bar{v}$ 和 $pH \simeq H(\bar{p} \times 1_A)$ 当且仅当 $(\bar{p} \times 1_A)^* \mathcal{H} \theta_j^*(l_j) = 0$, 对所有 $j \in J$. 这里 $\mathcal{H}: H^{n_j}(X \times A; \zeta_j) \rightarrow H^{n_j+1}(X \times CA, X \times A; \zeta_j)$.

证明 由推论 1 知存在 H 满足上述命题要求的充要条件是 $f^{-1}(\theta)EHq\bar{p}' \simeq *$, 显然, $f^{-1}(\theta)EHq\bar{p}' \simeq *$ 当且仅当 $qj f^{-1}(\theta)EHq\bar{p}'^*$, $j \in J$. 从图 4 得交换的图 5. 从而得到 H 存在的充要条件为 $(\bar{p} \times 1_A)^* \mathcal{H} \theta_j^*(l_j) = 0$, 对所有 $j \in J$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & H^{n_j+1}(\sum (E \times CA); \pi_j) & \rightarrow & H^{n_j+1}(\sum (E \times A); \pi_j) & \xrightarrow{q^*} & H^{n_j+1}(E \times CA, E \times A; \pi_j) \rightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow (\sum (\bar{p} \times 1_A))^* & & \uparrow (\bar{p} \times 1_A)^* \\
 \cdots & \rightarrow & H^{n_j+1}(\sum (X \times CA); \pi_j) & \rightarrow & H^{n_j+1}(\sum (X \times A); \pi_j) & \xrightarrow{q^*} & H^{n_j+1}(\sum (X \times CA), X \times A; \pi_j) \rightarrow \cdots \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 & & \cdots \rightarrow H^{n_j}(X \times CA; \pi_j) & \rightarrow & H^{n_j}(X \times A; \pi_j) & & \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 \cdots & \rightarrow & H^{n_j}(K(\pi_j, n_j); \pi_j) & \xrightarrow{\rho_j^*} & H^{n_j}(B; \pi_j) & \xrightarrow{\theta^*} & H^{n_j}(X; \pi_j) \rightarrow \cdots \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 \cdots & \rightarrow & H^{n_j+1}(K(\pi_j, n_j + 1); \pi_j) & \xrightarrow{q_j^*} & H^{n_j+1}(D; \pi_j) & \xrightarrow{(\tau^{-1}(\theta))^*} & H^{n_j+1}(\sum X_j; \pi_j) \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

图 5 同伦交换序列

Fig. 5 Homotopic comutative sequences

致谢: 感谢导师左再思教授和沈文淮教授的指导.

参 考 文 献

- 1 Oda N. The homotopy set of the axes of pairings. Canad J Math, 1990, XLII 856~ 868
- 2 Gottlieb D H. Evaluation subgroups of homotopy groups. Amer J Math, 1969, 91 729~ 755
- 3 Gottlieb D H. On fibre spaces and the evaluation map. Ann Math, 1968, 87 42~ 45
- 4 Gottlieb D H. On the construction of G-spaces and applications to homogeneous spaces. Proc Cambridge Philos Soc, 1970, 68 321~ 327
- 5 Halbhavi I G, Varadarajan K. Gottlieb sets and duality in homotopy theory. Canad J Math, 1975, 27 1042~ 1055
- 6 Hoo C S. Lifting Gottlieb sets. J London Math Soc, 1976, 14 535~ 544
- 7 Yeo Soo Yoon. Lifting Gottlieb sets and duality. Proc Amer Math Soc, 1993, 119 1315~ 1327
- 8 Lim K L. On cycli maps. J Austral Math Soc, 1982, 32(A): 349~ 357

The Liftings of the Generalized Gottlieb Sets

Dai Xiongping^{*}

Abstract Let the map $p: E \rightarrow X$ be a principle fibration induced by a map $\theta: X \rightarrow B$, and $g: A \rightarrow X$ be a v -cyclic map, where $v: X \rightarrow X$ be a given map. If the given maps $\bar{v}: E \rightarrow E$ and $\bar{p}: E \rightarrow X$ satisfy $p\bar{v} \simeq v\bar{p}$, when does g lift to a map $A \rightarrow E$ which is $\bar{v}$ -cyclic? This paper gives an answer of this question for arbitrary A and B .

Keywords cyclic maps, generalized Gottlieb set, the principle fibration and pull-back

^{*} Department of Scientific Computing and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou