

多维门限自回归序列核密度估计的渐近性质

宋心远 邓集贤

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 通过研究多维门限自回归序列所构成的 Markov 链的几何遍历性, 得到了此序列的一致混合性, 并在一致混合条件下, 给出了其核密度估计的一些渐近性质.

关键词 门限自回归, 核密度估计, L^1 相容性, 渐近正态性

分类号 O 211. 61

1 门限自回归序列的一致混合性

定义 1 设 $(\mathcal{X}, F)$ 为可测空间, V 和 f 分别为其上的广义测度和可测函数, 广义实数

$$\int_{\mathcal{X}} f \, dV^+ - \int_{\mathcal{X}} f \, dV^-$$

称为 f 对于广义测度 V 在可测空间 $\mathcal{X}$ 的积分, 记作 $\int_{\mathcal{X}} f \, dV$, 即

$$\int_{\mathcal{X}} f \, dV \triangleq \int_{\mathcal{X}} f \, dV^+ - \int_{\mathcal{X}} f \, dV^-$$

其中, V^+, V^- 为 V 的 Jordan 分解中的上、下变差测度. 若 $\left| \int_{\mathcal{X}} f \, dV \right| < \infty$, 则称 f 在 $(\mathcal{X}, F, V)$ 上可积. 不难证明广义测度积分有以下两个基本性质.

引理 1 设 $(\mathcal{X}, F)$ 为可测空间, V 和 f 分别为其上的广义测度和可测函数, 则有

(1) 若 f 对 V 可积, 则 $\left| \int_{\mathcal{X}} f \, dV \right| \leq \int_{\mathcal{X}} |f| \, d|V|$ 其中 $|V|$ 为 V 的全变差测度.

(2) 若 V_1, V_2 为 $(\mathcal{X}, F)$ 上的两个有限测度, 而 f 对 V_1 与 V_2 可积, 则

$$\int_{\mathcal{X}} f \, d(V_1 - V_2) = \int_{\mathcal{X}} f \, dV_1 - \int_{\mathcal{X}} f \, dV_2$$

定义 2 不可约 Markov 链 $\{x_n\}$, 取值于 $(\mathcal{X}, F)$ 称为遍历的, 如果存在 $(\mathcal{X}, F)$ 上唯一的概率测度 c , 满足 $\int_{\mathcal{X}} P(x, A) \, c(dx) = c(A) \quad \forall A \in F$.

特别地, 如果存在 $r \in [0, 1)$, 使得 $\|P^n(x, \cdot) - c(\cdot)\| = o(r^n)$, 对 x, c -a. s. 则称 $\{x_n\}$ 为几何遍历的. 其中 $\|\cdot\|$ 为全变差范数, 即若 $V(A) = P^n(x, A) - c(A)$, $|V|$ 为 V 的全变差测度, 则 $\|P^n(x, \cdot) - c(\cdot)\| = \int_{\mathcal{X}} |V| \, (dx)$

定义 3 序列 $\{x_n\}$ 称为 h 混合 (或一致混合), 如果存在 $h > 0, h \searrow 0$, 使得

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq h P(A)$$

其中, $A \in \mathcal{F}_K \triangleq \{x_n: n \leq k\}, B \in \mathcal{F}_{K+m} \triangleq \{x_n: n \geq K+m\}$

引理 2 Markov 链 $\{x_n\}$ 是几何遍历的, 则 $\{x_n\}$ 是一致混合的.

证明 对任意的 $A \in \mathcal{F}_K, B \in \mathcal{F}_{K+m}, |P(A \cap B) - P(A)P(B)| =$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{X}} P(A | \mathcal{F}_m^c) d\mu(x_m) \int_{\mathcal{X}} [P^n(x_m, dx_{m+n}) - \mu(dx_{m+n})] P(B | \mathcal{F}_{m+n}^c) \right| \leq \\ & \int_{\mathcal{X}} P(A | x_m) d\mu(x_m) \int_{\mathcal{X}} P(B | x_{m+n}) |P^n(x_m, \cdot) - \mu(\cdot)| d\mu(x_{m+n}) \leq \\ & \|P^n(x_m, \cdot) - \mu(\cdot)\| \int_{\mathcal{X}} P(A | x_m) d\mu(x_m) = o(r^n) P(A). \end{aligned}$$

引理 3^[3] 设 $\{x_n\}$ 是 Markov 链, 如果存在 R^K 中的紧集 S 及非负可测函数 g , 使得

$$\sup_{x \in S} \int_{R^K} P(x, dy) g(y) < \infty; \quad g(x) \geq 1, x \in S; \text{ 且存在 } r < 1, \text{ 使得}$$

$$\int_{\mathcal{X}} P(x, dy) g(y) \leq r g(x), \quad x \in S.$$

则 $\{x_n\}$ 是几何遍历的. 其中 $P(x, \cdot)$ 为 $\{x_n\}$ 的转移概率函数.

现考虑 K 维门限自回归模型

$$Z_i = \sum_{j=1}^p A_j^{(i)} Z_{i-j} + X^{(i)} \quad \text{当 } Z_{i-d} \in R^K, i = 1, \dots, l \quad (1)$$

其中, $\{R^K\}_l^1$ 是 K 维欧氏空间的一个剖分, 参数 p, d, l 均假定为已知. $A_j^{(i)} = (a_j^{(i)}(m, n))_{K \times K}$, 关于白噪声序列 $\{X^{(i)}\}$ 的假定见文 [4]. 令

$Z_t = (Z_{t-p}, Z_{t-p+1}, \dots, Z_{t-1})'$, 文 [5] 证明了 $\{Z_t\}$ 为 R^{Kp} 上具有平稳转移的 Markov 链.

设 $x = (x'_1, x'_2, \dots, x'_p)'$, $y = (y'_1, y'_2, \dots, y'_p)'$, 则 $\{Z_t\}$ 的转移概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} f_i(y_p - \sum_{j=1}^p A_j^{(i)} y_{p-j}) & \text{当 } y_{j-1} = x_j \quad (j = 1, \dots, p) \text{ 且 } y_{p-d} \in R^K \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

定理 1 若模型 (1) 满足条件

$$\sum_{j=1}^p \|A_j^{(i)}\| < 1, \quad i = 1, \dots, l \quad (2)$$

其中, $\|A_j^{(i)}\| = \max_{m \leq n \leq m+K} \sum_{k=1}^K |a_j^{(i)}(m, n)|$, 则 $\{Z_t\}$ 是几何遍历的.

证明 由条件 (2), 存在一组常数 $c^1, c^2, \dots, c^p$, X 满足 $1 = c^1 < c^2 < \dots < c^p$ 且

$$\sum_{j=1}^p \|A_j^{(i)}\| c_j < X < 1; \quad c_{i+1} < X, \quad i = 1, \dots, p-1 \quad \text{令 } g(y) = \max_{1 \leq i \leq p} \left(\|y_i\| / c_{p-i+1} \right) + 1$$

其中, $y_i = (y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(K)}) \in R^K, \|y_i\| = \sum_{m=1}^K |y_i^{(m)}|, i = 1, \dots, p$, 仿 [5] 的证明, 容易找到 R^K 中的一个紧集 S , 使得引理 3 中的①和②成立. 定理证毕.

定理 2 在条件 (2) 下, Markov 链 $\{Z_t\}$ 是一致混合的.

证明 由引理 2 及定理 2 立即得到.

容易证明当 $\{Z_t\}$ 是一致混合时, 模型 (1) 中的 $\{Z_t\}$ 也是一致混合的.

2 核密度估计及其渐近性质

设 $\{Z_t\}$ 为取值于 R^K 上具有公共密度 f 的严平稳序列, f 的核估计量为

$$f_n(x) = (nh^k)^{-1} \sum_{i=1}^n W((x - Z_i)h^{-1}) \quad (3)$$

其中, $h = h(n)$ 为正数序列, W 以下均假设为 R^K 上的一个密度.

引理 4 设 $\{Z_t\}$ 是一个取值于 R^K 上具有公共密度 f 的一致混合过程, f 的核密度估计 f_n 如 (3) 式, 若

$$h + (nh^k)^{-1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (4)$$

则^[4] $\forall X > 0, \exists r, n_0 > 0, s. t. P(J_n \geq X) \leq e^{-m}, n \geq n_0$, 即 $J_n = \int |f_n - f| \xrightarrow{(c)} 0, n \rightarrow \infty$

由定理 2 及引理 4 的结果立即得到定理 3.

定理 3 设模型 (1) 中的 $\{Z_t\}$ 严平稳, 则在条件 (2), (4) 下, $f_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 L^1 -相容估计.

下面讨论 $\{Z_t\}$ 的边缘核密度估计.

设 f 是 $\{Z_t\}$ 的边缘密度, 在固定点 x , f 连续且 $f(x) > 0$, 其核密度估计定义如下:

$$f_n(x) = (nh)^{-1} \sum_{i=1}^n W((x - Z_i)h^{-1}) \quad (5)$$

其中, h 和 W 同 (3). 若对 h 和 W 再加以下限制, 则有定理 4

$$\text{存在 } U(0 < U < 1) \text{ 使 } h \leq O(n^U) \quad (6)$$

$$\text{存在 } u_0 > 0, \text{ 使当 } |u| > u_0 \text{ 时, } W(u) = 0 \quad (7)$$

$$\text{存在 } W_0 > 0, \text{ 使 } \int_{-\infty}^{+\infty} W^3(u) du < \infty \quad (8)$$

定理 4 设模型 (1) 中的 $\{Z_t\}$ 严平稳, 其边缘核密度估计如 (5), 则在条件 (2), (6), (7)

和 (8) 下有 ① $E[f_n - f]^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$; ② $[f_n(x) - Ef_n(x)] / [Var f_n(x)]^{1/2} \xrightarrow{d} N(0, 1), n \rightarrow \infty$.

证明 在条件 (2) 下, 定理 2 已证明了 $\{Z_t\}$ 是一致混合的, 而由 [1] 中定理 17.2.3, $\{Z_t\}$ 一致混合包含 $d_n = d(\mathcal{B}(Z_k, k \leq 0), \mathcal{B}(Z_k, k \geq n)) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 其中 $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{f \in L^2(\mathcal{A}), g \in L^2(\mathcal{B})} |\text{Corr}(f, g)|$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是任意两个 σ -域, 由文 [2] 定理 7 结论得证.

参 考 文 献

- 1 Ibragimov I A. Some limit theorems for strict-sense stationary stochastic processes (in Russian). Dokl Akad Nauk SSR, 1959, 125 711~ 714
- 2 Richard C, Bradley R C. Central limit theorems under weak dependence. J Multivariate Anal. 1981, 11(1): 1~ 16
- 3 Silveria G B. L_1 -convergence for density estimators under mixing conditions. Eco and Soc Research Council London School of Economics, 1988
- 4 Tweedie R L. Criteria for rate of convergence of Markov chain with application to queueing and storage theory. In: Probability, Statistics and Analysis. Cambridge Cambridge University, 1983
- 5 宋心远, 邓集贤. 多维门限自回归模型系数估计的强相容性. 中山大学学报 (自然科学版), 1990, 29 (1): 23~ 28

Asymptotic Properties of Multiple TAR Sequence Kernel Density Estimators

Song Xinyuan^{} Deng Jixian*

Abstract Obtains the φ -mixing property of the multiple TAR sequence by studing the geometric ergodicity of the Markov chain formed by the sequence Under φ -mixing condition, some asymptotic properties are given for the kernel density estimators.
Keywords threshold autoregressive, kernel density estimate, L^1 consistency, asymptotic normality

。 简 讯 。

广东省第二届优秀期刊评选揭晓

由广东省委宣传部、省新闻出版局、省科学技术委员会、省期刊协会联合举办的广东省第二届优秀期刊评选活动已经揭晓。本届评选活动从全省 300多种期刊中,共评出获奖期刊 91种。其中, 27种期刊获优秀社会科学期刊奖, 19种期刊获优秀科技期刊奖一等奖, 24种期刊获优秀社会科学期刊奖提名奖和特别纪念奖, 21种期刊分获优秀科技期刊奖二等奖和三等奖。

中山大学学报 (自然科学版) 获优秀科技期刊奖一等奖。

(张 文)

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>