中山大学学报 (自然科学版)
第36卷 第6期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 36 No. 6
1997年 11月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 1997

KNA算法计算复杂性分析*

范江华 黎培兴 王则柯
(中山大学岭南学院, 广州 510275)

摘 要 分析了 KNA算法的计算复杂性, 证明了当扰动项足够小时, KNA算法是多项式时间算法.

关键词 多项式, KNA算法, 计算复杂性
分类号 O 241.7

计算复系数多项式的零点问题是一个很古老的课题,值得注意的方法有: Newton迭代法, Kuhn算法和 KNA算法等算法.

Newton迭代法是一种古老的方法,但存在初值选取的问题,且对于退化情况,无法求解. Kuhn算法和 KNA算法则不存在这种问题,只要编制好程序,然后输入多项式的系数和计算精度要求,就可求出多项式的零点.

Smale在文 [1]中分析了 Newton迭代法的计算复杂性,文 [2,3]分析了 Kuhn算法计算复杂性. Kuhn算法为整数标号算法,而 KNA算法为向量标号算法. KNA算法对多项式作了小扰动,从而保证能按重数收敛到多项式的零点,当扰动项为零时,文 [2]对于 Kuhn算法的复杂性估计在 KNA算法情况完全成立.但非零扰动项的引入是保证 KNA算法算出多项式零点的关键性设置.本文讨论的是: 当扰动项足够小时, KNA算法的计算复杂性问题.本文的记号与文 [4,5]相同.

KNA算法是由 Kojima, Nishino, Arima[6]提出,其算法概述如下: 记复数 z 平面为 $\mathbf{C}$, 赋予 $\mathbf{C}$ 以欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 的结构, $z = \mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z$ 表示成 $z = (\mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z)$.现要求多项式 $P(z)$ 的零点,设 $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$,其中 $a_i \in \mathbf{C}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.令 $Q(z) = z^n - V^n$ 为辅助多项式,其中 $V = 20n$.定义

$$H(t,z) = \begin{cases} 2(1-t)[P(z)+a] + (2t-1)Q(z) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ P(z) + 2ta & t \in (0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

其中, a 为一复常数,且 $a \neq 0$.

作 $(0,1] \times \mathbf{C} = (0,1] \times \mathbf{R}^2$ 的 J_3 剖分,可以确定 $H(t,z)$: $(0,1] \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 关于 J_3 剖分的单纯逼近: H_1: $(0,1] \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$,即若 $(t,z) = \sum_{j=0}^{3} \lambda_j (t_j, z_j)$ 时,其中, $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum_{j=0}^{3} \lambda_j = 1$, $(t_j,$

* 国家自然科学基金 (19471088) 和国家教委博士点专项基金资助项目
收稿日期: 1997-05-16 范江华, 男, 30岁, 博士研究生

$z_j)\in (J_3)^0$.

定义

$$H_1(t,z)=\sum_{j=0}^{3}\lambda_j H(t_j,z_j)$$

利用单纯同伦向量标号算法,跟踪 $H_1(t,z)$ 的零点,只要 $a\neq 0$, KNA算法可算出多项式的全部零点,并告诉每个零点的重数[5,6].

本文得到下面的结果

定理　当扰动 a 足够小时,用 KNA算法按精度要求 ε,算出多项式 $P(z)$ 的零点所需要 $P(z)$ 的计值次数不超过

$$16R^2+28\pi n\left(6+\frac{9n}{2}\right)^2\left[\log_2\frac{\left(1+\frac{3n}{4}\right)n\sqrt{2}}{(n-1)\varepsilon}\right]$$

其中, $R=\max\{1+\frac{9}{4}(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|+|a|),30n\}+\sqrt{2}$; $[r]$ 表示不小于 r 的最小整数.

所谓按精度要求 ε,即算出的零点 $\tilde{z}_i$ 与 $P(z)$ 的实际零点 z_i 满足: $|\tilde{z}_i-z_i|\leqslant\varepsilon$.

引进下面几个引理,其中引理 2～ 4的证明可参见文 [4,5].

引理 1　设 $g(z)=P(z)+b$, b 为常数,则存在 $P(z)$ 与 $g(z)$ 零点的排序 z_i, ξ_i,使得 $|z_i-\xi_i|<3n\sqrt[s]{|b|}$,其中 $1\leqslant i\leqslant n$.

证明　设 $g(z)$ 的 1个零点为 ξ,即 $g(\xi)=0$,设 $P(z)$ 的所有零点为 $z_i(1\leqslant i\leqslant n)$,则 $P(z_i)=0$,从而 $P(\xi)-g(\xi)-b=-b$,因此有 $(\xi-z_1)(\xi-z_2)\cdots(\xi-z_n)=-b$.那么必存在 $P(z)$ 的 1个零点,记为 z_j 满足: $|z_j-\xi|\leqslant\sqrt[n]{|b|}$.

令 $\delta=\sqrt[n]{|b|}$.若 $|z_i-z_j|<2\delta$,则称 z_i 与 z_j 相邻.若存在 $z_{k1},z_{k2},\cdots,z_{km}$,使点列 $z_i,z_{k1},z_{k2},\cdots,z_{km},z_j$,除了 z_i 外,每一点都与前一点相邻,则称 z_i 与 z_j 相连.现在我们把 $g(z)=0$ 的解集分为若干个子集 $K_1,K_2,\cdots,K_s$,划分的原则是: 所有相连的点属于同一个点集,不相连的点属于不同的一点集.

令 $G_k=\bigcup_{z_i\in K_k}B(z_i,\delta)$,其中 $B(z_i,\delta)=\{z:|z-z_i|\leqslant\delta\}$.显然 G_k 不相交.记 G_k 的边界为 ∂G_k,由有限个圆弧组成.

令 $P_t(z)=P(z)+tb$, $t\in[0,1]$.由上可知 $P_t(z)=0$ 的根在 G_k 的内部, ∂G_k 上无 $P_t(z)=0$ 的根.下证 $P_t(z)$ 在每个 G_k 内的零点个数与 t 无关.

任意给定 $t_0\in[0,1]$,显然 $m=\min_{x\in\partial G_k}|P_{t_0}(z)|>0$.设 $\varepsilon_0>0$,且满足: $|\varepsilon_0 b|<m$.当 $t\in(t_0-\varepsilon_0,t_0+\varepsilon_0)\cap[0,1]$, $z\in\partial G_k$ 时,

$$|P_t(z)-P_{t_0}(z)|<|\varepsilon_0 b|<|P_{t_0}(z)|$$

由 Rouche定理可知: 当 $t\in(t_0-\varepsilon_0,t_0+\varepsilon_0)\cap[0,1]$ 时, $P_t(z)$ 与 $P_{t_0}(z)$ 在 G_k 内有相同个数的零点.因此,在 t_0 的 ε_0 邻域内, $P_t(z)$ 的零点个数为常数.又因 $[0,1]$ 紧致,故 $P_t(z)$ 在 G_k 内的零点个数为常数.即 $g(z)$ 与 $P(z)$ 在每个 G_k 内零点个数相同.设 $P(z)$ 在某个 G_i 零点为 $z_{p1},z_{p2},\cdots,z_{pj}$,则 $g(z)$ 在 G_i 内也有 j 个零点,记为 $\xi_{p1},\xi_{p2},\cdots,\xi_{pj}$.很明显, $|z_i-\xi_i|<(2n-1)\delta=3n\sqrt[n]{|b|}$.

扰动项 a 满足 $0<|a|<\left(\frac{\varepsilon}{3n^2}\right)^n$ 时,由引理 1可知: $t=2^{-k}(k\in N)$ 时, $H(t,z)=P(z)+2t\,a$ 的零点 $z_{k,i}$ 与 $P(z)$ 的零点 z_i 满足

$$|z_{k,i}-z_i|<\frac{X}{n},|z_{k1,i}-z_{k2,i}|<\frac{X}{n},1\leqslant i\leqslant n$$

引理 2 设复数 k符合 $\|k\|<1$,则有 $\|\arg(1+k)\|\leqslant\frac{c}{2}\|k\|$.

引理 3 若 f是 $(0,1]\times$ **C**的 J_3剖分中的完备三角形,其顶点都不是 $H(t,z)$的零点,则 f至少有 1对顶点的 $H(t,z)$映射像对原点的张角不小于$\frac{2\pi}{3}$.

引理 4 若 f是在 $\{2^{-k}\}\times$ **C**上的完备三角形,则 f的每一个顶点与 $H(2^{-k},z)$的零点距离不超过 $(1+\frac{3n}{4})2^{-k+\frac{1}{2}},k\in N$.

引理 5 设 $K=[\log_2\frac{(1+3n/4)n\sqrt{2}}{(n-1)X}]$,则在 $(0,2^{-K})\times$ **C**上的计算是不必要的.其中,$[x]$表示不小于 x的最小整数.

证明 设 f为 $\{2^{-K}\}\times$ **C**上的完备三角形,则其任一顶点与 $H(2^{-K},z)$的零点距离不超过 $(1+3n/4)\sqrt{2}\cdot2^{-K}\leqslant\frac{n-1}{n}X$,又因 $H(2^{-K},z)$的零点与 $P(z)$的零点距离小于 X/n.故 f上任一顶点与 $P(z)$的零点距离小于 X.这就达到了精度要求.证毕.

引理 6 设 f是在 $(2^{-k-1},2^{-k})\times$ **C**内的完备三角形,其中 $k\leqslant K$,则其必有一顶点与 $P(z)$的零点的距离小于 $(\frac{9}{2}n+5)\sqrt{2}\cdot2^{-k}$.

证明 若 f的 1个顶点为 $H(t,z)$的零点,引理显然成立.

若 f的任一顶点不为 $H(t,z)$的零点,下面用反证法证明引理结论成立.设 $(2^{-k_1},z_1)$,$(2^{-k_2},z_2)$为 f的任意 2个顶点,$k=k_1\leqslant k_2\leqslant k+1$.

设 $H(2^{-k_1},z_1),H(2^{-k_2},z_2)$的零点分别为 T_i,U_i

则 $|T_i-U_i|<\frac{X}{n},1\leqslant i\leqslant n$

因 $K=\left[\log_2\frac{(1+3n/4)n\sqrt{2}}{(n-1)X}\right]$

故 $\frac{(n-1)X}{n}<(1+3n/4)\sqrt{2}\cdot2^{-K+1}$

$$\frac{X}{n}<\frac{3n+4}{4(n-1)}\sqrt{2}\cdot2^{-K+1}\leqslant\frac{3n+4}{2(n-1)}\sqrt{2}\cdot2^{-K}\leqslant5\sqrt{2}\cdot2^{-K}\leqslant5\sqrt{2}\cdot2^{-k}$$

因而 $|z_1-z_2|+|T_i-U_i|<\sqrt{2}\cdot2^{-k}+\frac{(n-1)X}{n}<6\sqrt{2}\cdot2^{-k}$

若 $|z_2-U_i|\geqslant\frac{9n}{2}\sqrt{2}\cdot2^{-k_1},1\leqslant i\leqslant n$

则 $|z_1-z_2|+|T_i-U_i|<\frac{4}{3n}|z_2-U_i|$

从而 $\left\|\frac{z_1-z_2-T_i+U_i}{z_2-U_i}\right\|<1$

$$\left|\arg\frac{H(2^{-k_1},z_1)}{H(2^{-k_2},z_2)}\right|=\left|\arg\frac{(z_1-T_1)\cdots(z_1-T_n)}{(z_2-U_1)\cdots(z_2-U_n)}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\arg\frac{z_1-T_i}{z_2-U_i}\right|=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\arg\left(1+\frac{z_1-z_2-T_i+U_i}{z_2-U_i}\right)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{\pi}\frac{\pi}{2}\frac{|z_1-z_2|+|T_i-U_i|}{|z_2-U_i|}<\frac{2\pi}{3}$$

这与引理 3矛盾.故存在 $H(2^{-k_2},z_2)$的 1个零点与 f中 1个顶点距离不超过$\frac{9n}{2}\sqrt{2}\cdot2^{-k_1}$.

这个顶点与 $P(z)$ 的 1个零点距离小于

$$\frac{9n}{2}\sqrt{2}\cdot 2^{-k_1}+X/n<\left(\frac{9n}{2}+5\right)\sqrt{2}\cdot 2^{-k_1}$$

由引理 4和引理 6可知,若 $(t_1,z_1),(t_2,z_2),(t_3,z_3)$ 为完备三角形,则其任一顶点与 $P(z)$ 的 1个零点距离小于 $(\frac{9n}{2}+6)W$,W为其在 $0\times C$ 上的投影网径.

引理 7 $[1/2,1]\times C$ 内的完备单纯形在 $[1/2,1]\times B(\mathbf{R})$ 内,其中,$B(\mathbf{R})=\{z\in C:\|z\|\leqslant \mathbf{R}\}$,$\mathbf{R}=\max\{1+\frac{9}{4}(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|+|a|),30n\}+\sqrt{2}$.

证明方法与引理 6类似,从略.

定理的证明 由引理 6和引理 7可知所有计算都在位于 $[1/2,1]\times C$ 内的 1个半径为 R 的圆柱和 $[2^{-k-1},2^{-k}]\times C$ 内 n 个(可以相重)半径按 $(9n/2+6)2^{-k+1/2}$ 不断缩小的圆柱阶梯组成的区域内. $[1/2,1]\times C$ 内的完备单纯形在 $[1/2,1]\times B(R)$ 内,$[1/2,1]\times B(R)$ 内顶点的个数小于 $16R^2$ 个,在 $[2^{-k-1},2^{-k}]\times C$ 内,每个圆柱中至多有 $2\pi(9n/2+6)^2$ 个平行六面体,而每个平行六面体分成 14个四面体,而每个四面体顶多通过 1次,每通过 1次只计算 $P(z)$ 的值,故至多计算 $28n\pi(9n/2+6)^2$ 个点,就可上升 1层.证毕.

从上证明可知:当 a 充分小时,KNA算法的计算成本为 $O(n^3\ln(n/X))$,因而 KNA算法为多项式时间算法,且当 $a\to 0$ 时,KNA算法的复杂性与文 [3]中分析的 Kuhn算法的复杂性充分接近.

参 考 文 献

1 Smale S. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. Bull AMS 1981, 4(1): 1~36

2 Kuhn H W, Wang Z, Xu S. On the cost of computing roots of polynomial. Math Prog, 1984, 28(2): 156~163

3 Renegar J. On the cost of approximating all roots of a complex polynomial. Math Prog, 1985, 32(3): 319~336

4 王则柯.单纯不动点算法基础.广州:中山大学出版社,1986. 164~242

5 王则柯,高堂安.同伦方法引论.重庆:重庆出版社,1990. 248~261

6 Kojima M, Nishino H, Arima N. A PL homotopy for finding all roots of a polynomial. Math Prog, 1979, 16(1): 37~62

On the Computational Complexity of KNA Algorithm

*Fan Jianghua** *Li Peixing* *Wang Zeke*

Abstract The purpose of this paper is to analyse the computational complexity of KNA algorithm and to prove that KNA algorithm is a polynomial time algorithm as the perturbation is small enough.

Keywords polynomial, KNA algorithm, computational complexity

* Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275