

# 对角型椭圆组解的 Hölder 连续性<sup>\*</sup>

梁 鋈 廷

(中山大学数学系, 广州 510275)

**摘 要** 考虑一类对角型椭圆组, 它的非线性项关于未知解的梯度为二次增长. 在适当的“小性条件”下, 对有界解证明它的模在区域内部连续. 这个结果和 Wiegner 的一个结果相结合重新得到有界解的内部 Hölder 连续性.

**关键词** 对角型椭圆组, 二次增长, 内部 Hölder 连续性

**分类号** O 175. 25

设  $G$  为  $n$  维欧氏空间  $E^n$  中的有界区域 ( $n \geq 3$ ). 在  $G$  考虑下面的半线性椭圆组:

$$\int_G \{h_i^T a^{TU}(x) u_i^U + h B_i(x, u, 5u)\} dx = 0 \quad \forall h = (h^1, h^2, \dots, h^N) \in [W^{1,2}(G)]^N \quad (1)$$

其中,  $u_i^T = \frac{\partial}{\partial x} u^i$ . 假设  $a^{TU}(x)$  在  $G$  定义并且可测,  $B_i(x, u, Y)$  在  $G \times E^N \times E^{nN}$  上定义, 关于  $x$  为可测, 关于  $u, Y$  为连续, 又设  $a^{TU}$  和  $B_i$  满足下面的结构条件:

$$a^{TU}(x) Y^T Y \geq |Y|^2, |a^{TU}(x)| \leq \kappa \quad (2)$$

$$\sum_i B_i(x, u, Y)^2 \leq a |5u|^2 + b \quad (3)$$

其中  $\kappa \geq 1, a, b \geq 0$  均为常数. 以下只限于考虑有界解, 即未知解  $u \in [W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G)]^N$ , 并且设

$$aM < 1 \quad (M = \text{vrai max}_G |u|) \quad (4)$$

除此之外还设

$$\sum_i u^i B_i(x, u, 5u) \leq a^* |5u|^2 + b^* \quad (5)$$

其中,  $a^*, b^*$  都是常数, 并且条件 (3) 隐含了  $a^* \leq aM$ . 假定小性条件 (4) 满足或比 (4) 更弱的条件

$$aM + a^* < 2 \quad (6)$$

满足, [1~ 6] 中给出 (1) 的有界解在  $G$  内为 Hölder 连续的证明, 现在证明下面的定理成立.

**定理 1** 设  $u \in [W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G)]^N$  满足 (1), 设条件 (2), (3), (5) 满足并且出现在 (5) 中的  $a^* < 1$ , 那么  $|u|^2 = \sum_i |u^i(x)|^2$  在  $G$  内连续.

为证定理 1, 记  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$ ,  $B(r) = B(0, r)$ . 不失一般性, 设  $B(8r) \subset G$ .

\* 收稿日期: 1996-05-27 梁鋈廷, 男, 59 岁, 教授

设  $Z \in W^{1,2}(B(2r)) \cap L^\infty(B(2r))$ . 取  $k = Z^i$  作试验函数, 代入 (1) 即得:

$$\int_{B(2r)} \left( -\frac{1}{2} Z_{i\alpha}^T(x) V_{i\alpha} + Zg \right) dx = 0, \forall Z \in W^{1,2}(B(2r)) \cap L^\infty(B(2r)) \quad (7)$$

其中  $V = |u|^2$ ,  $g = u_{i\alpha}^T u_{i\alpha} + u^i B_i(x, u, 5u)$ . 由 (2), (3) 和 (5) 可得:

$$(1 - a^*) |5u|^2 - b^* \leq g \leq (\kappa + aM) |5u|^2 + bM \quad (8)$$

此外, 由于设  $a^* < 1$ , 故成立

$$\int_{B(r)} |5u|^2 dx \leq C[M(2r) - M(r)] r^{n-2} / (1 - a^*) + cbMr^n \quad (9)$$

其中  $M(r) = \operatorname{vrai} \max_{B(r)} (M(r) \leq M^2)$ , 常数  $C$  只依赖  $n, \kappa$  而和  $r$  无关. 关于 (9), 在 [5] 中利用 Green 函数给出一个证明; [7] 中则有另外的证明, 但无需利用 Green 函数. 联合 (8), (9) 并为了简单把  $a, b$  和  $a^*, b^*$  都合并到  $C$  中得:

$$\int_{B(r)} |g| dx \leq C[M(2r) - M(r)] r^{n-2} + cr^n \quad (10)$$

当  $y \in B(r)$  时, 用  $B(y, d)$  取代  $B(r)$ , 由 (10) 得

$$h(y, d) = \int_{B(y, d)} |g| dx \leq C[M_y(2d) - M_y(d)] d^{n-2} + cd^n \quad (11)$$

其中常数  $C$  和  $y, d$  无关;  $M_y(d) = \operatorname{vrai} \max_{(y, d)} u$ . 根据 (7), 在  $B(r)$  上分解  $v = h + w$ , 使  $v - h = w \in W^{1,2}(B(r))$  并使

$$\int_{B(r)} Z_{i\alpha}^T(x) h_{i\alpha} dx = 0 \quad \forall Z \in W^{1,2}(B(r)) \quad (12)$$

$$\int_{B(r)} \left[ -\frac{1}{2} Z_{i\alpha}^T(x) W_{i\alpha} + Zg \right] dx = 0 \quad \forall Z \in W^{1,2}(B(r)) \cap L^\infty(B(r)) \quad (13)$$

根据周知的椭圆型方程的理论, 对  $h$  成立

$$\begin{aligned} 0 \leq C_{B(d)} h &= \operatorname{vrai} \max_{B(r)} - \operatorname{vrai} \min_{B(r)} \leq C(n, \kappa) (d/r)^{-} (r^{2-n} \int_{B(r)} |5h|^2 dx)^{1/2} \leq \\ &C(n, \kappa) (d/r)^{-} (r^{2-n} \int_{B(r)} |5v|^2 dx)^{1/2} \leq \\ &C(n, \kappa) (d/r)^{-} (r^{2-n} \int_{B(r)} |u|^2 |5u|^2 dx)^{1/2} \leq C(d/r)^{-} (M^2 + r^2) \quad \forall d < r \end{aligned} \quad (14)$$

在推导 (14) 的最后结果时, 我们利用了 (9), 又 (14) 中的  $- \in (0, 1)$  只依赖于  $n$  和  $\kappa$ . 此外, 根据广义解的弱最大值原理, 对  $h$  成立

$$\operatorname{vrai} \min_{B(r)} |h| \leq \operatorname{vrai} \max_{B(r)} |h| \leq \operatorname{vrai} \max_{B(r)} v \leq M(r) \leq M^2, \text{ 这隐含了 } w = v - h \in L^\infty(B(r)).$$

下面转来估计  $|w|$ . 设  $B(y, e) \subset B(r)$ , 设  $G^\varepsilon(\cdot, y) \in W^{1,2}(B(r))$  满足

$$\int_{B(r)} Z_{i\alpha}^T(x) G_{i\alpha}^\varepsilon dx = \oint_{B(y, e)} Z dx, \quad \forall Z \in W^{1,2}(B(r)) \quad (15)$$

其中,  $\oint_e w dx$  记为  $w$  在  $e$  的积分平均值. 根据文 [7] 有

$$0 \leq G^\varepsilon(x, y) \leq C|x - y|^{2-n} \quad (16)$$

其中的常数  $C > 0$  和  $x, y, e$  无关. 取  $Z = \pm w \in W^{1,2}(B(r))$  作试验函数, 代入 (15) 利用 (13) 和 (16) 即得

$$\oint_{B(y, e)} \pm w dx = \pm \int_{B(r)} w_{i\alpha}^T(x) G_{i\alpha}^\varepsilon dx = \mp \int_{B(r)} 2G^\varepsilon g dx \leq$$

$$C \int_{B(r)} |g| |x-y|^{n-2} dx$$

根据 (11), 借助分部积分, 由上式, 继续得

$$\begin{aligned} \pm \int_{B(y, \varrho)} w dx &\leq C \int_{B(y, 2r)} |g| |x-y|^{n-2} dx = C \int_0^{2r} d^{2-n} dd \int_{B(y, d)} |g| ds = \\ &C [d^{2-n} h(y, d)]_{d=0}^{2r} + (n-2) \int_0^{2r} d^{1-n} h(y, d) dd \leq \\ &C \{M_y(4r) - M_y(2r) + r^2 + \int_0^{2r} [M_y(2d) - M_y(d)] dd/d\} \end{aligned} \quad (17)$$

根据定义,  $M_y(d)$  是  $d$  的不减函数, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{2r} [M_y(2d) - M_y(d)] dd/d &\leq \int_0^{4r} [M_y(2d) - M_y(d)] dd/d = \\ &\int_0^{4r} [M_y(4r) - M_y(d) - (M_y(4r) - M_y(2d))] dd/d = \\ &\int_0^{4r} [M_y(4r) - M_y(d)] dd/d - \int_0^{2r} [M_y(4r) - M_y(d)] dd/d = \\ &\int_{2r}^{4r} [M_y(4r) - M_y(d)] dd/d \leq M_y(4r) - M_y(2r) \end{aligned} \quad (18)$$

由于  $y \in B(r)$ , 因而  $B(y, 4r) \subset B(5r)$ ,  $B(r) \subset B(y, 2r)$ . 于是  $M_y(4r) \leq M(5r)$ ,  $M_y(2r) \geq M(r)$ , 联合 (17), (18), 命  $\varrho \rightarrow 0$  并对  $y \in B(r)$  求上确界 (注意到 (17) 中的常数  $C$  和  $y, \varrho$  无关) 即得

$$\sup_{B(r)} |w| \leq C [M(5r) - M(r)] + Cr^2 \quad (19)$$

联合 (14), (19), 对  $d < r$  有

$$0 \leq C_{B(d)} v \leq 0 \leq C_{B(h)} w \leq 0 \leq C_{B(d)} w \leq 0 \leq C_{B(h)} v + 2 \sup_{B(r)} |w| \leq C(d/r)^{-1} (M^2 + r^2) + C [M(5r) - M(r)] + Cr^2 \quad (20)$$

因为  $M(r)$  是  $r$  的非负不减函数, 故当  $r \rightarrow 0$  时,  $M(5r) - M(r) \rightarrow 0$ . 由于 (20) 中的常数  $C$  与  $d, r$  无关, 因此对任意  $X > 0$ , 可以确定  $r$ , 使 (20) 右端末两项

$$C [M(5r) - M(r)] + Cr^2 \leq X/2.$$

固定  $r$ , 再令  $d \rightarrow 0$  可使 (20) 右端第一项小于  $X/2$ . 这样,  $d \rightarrow 0$  时,  $0 \leq C_{B(d)} w \rightarrow 0$ , 亦即  $v$  在原点为连续, 同理  $v$  在  $G$  内处处连续. 定理 1 至此获证.

Wiegner<sup>[6]</sup> 得到如下结果 (见 [6], 引理 2): 设条件 (2~4) 满足, 设  $u \in [W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G)]^N$ , 是 (1) 的解, 那么存在常数  $X > 0$ , 使得  $0 \leq C_{B(d)} w \leq X$  成立时, 同时有

$$\max_{1 \leq i \leq n} 0 \leq C_{B(d_i)} w \leq C(d/d_i)^{-1}, \forall d < d_i.$$

其中常数  $C, \varepsilon_1 > 0$  和  $d, d_i$  无关.

联合以上结果, 再一次得到下面定理.

定理 2 设条件 (2~4) 满足,  $u \in [W^{1,2}(G) \cap L^\infty(G)]^N$  是 (1) 的解, 那么,  $u$  在  $G$  内任何紧子集上满足某个  $E$  指数的一致 Holder 条件.

## 参 考 文 献

- 1 Wiegner M. Ein optimaler Regularitätssatz für schwache Lösungen gewisser elliptischer systeme. Math Z, 1976, 147: 21~ 28
- 2 Hildebrandt S, Widman K O. On the Hölder continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order. Ann Sc Norm Super Pisa, 1977, 4 145~ 178
- 3 Caffarelli L A. Regularity theorem for weak solutions of some nonlinear systems. Comm Pure Appl Math, 1982, 35 833~ 838
- 4 Tolksdorf P. A new proof of a regularity theorem. Invention Math, 1983, 71 43~ 49
- 5 Hildebrandt S. Quasilinear elliptic systems in diagonal form. In J M Ball(ed.). Systems of Nonlinear Partial Differential Equations. Reidel D Publishing Company, 1983. 173~ 217
- 6 Wiegner M. Über die Regularität schwacher Lösungen gewisser elliptischer systeme. Manuscripta Math, 1975, 15 365~ 384
- 7 Gruter M, Widman K O. The Green functions for uniformly elliptic equations. Manuscripta Math, 1982, 37 303~ 342
- 8 Giaquinta M, Modica G. Remarks on the regularity of the minimizers of certain degenerate functionals. Manuscripta Math, 1986, 57 55~ 99
- 9 Littman W, Stampacchia G, Weinberger H P. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann Sc Norm Super Pisa, 1963, 13 43~ 77

## Hölder Continuity of Solutions of Elliptic Systems in Diagonal Form

Liang Xiting<sup>\*</sup>

**Abstract** Consider an elliptic system in diagonal form of which the nonlinear terms are of quadratical growth respect to the gradient of the unknown solution. It is proved that the modulus of bounded solution of the above system is continuous in  $G$  under a suitable smallness condition. Combining this result with a result due to Wiegner the interior Hölder continuity is deduced again to bounded solutions.

**Keywords** elliptic system in diagonal form, quadratical growth, interior Hölder continuity

<sup>\*</sup> Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275