

# 高维时滞微分差分不等式及其应用<sup>\*</sup>

贾 保 国

(中山大学计算机科学系, 广州 510275)

**摘 要** 证明了一个高维时滞微分差分不等式. 用这个不等式和推广的 Alekseev 公式, 研究了非线性中立型系统零解的稳定性.

**关键词** 拟单调增, 指数稳定, 渐近稳定

**分类号** O 175. 7

著名的 Halanay 时滞微分不等式<sup>[1]</sup>在研究时滞系统稳定性时起着极其重要的作用. 因此, 建立恰当的微分不等式对研究常微分方程与泛函微分方程有着重要的意义. 本文首先建立了一个基本引理, 并应用此引理证明了一个高维混合型的微分差分不等式, 它包含了文 [1] 的时滞微分不等式, 然后用这个不等式和推广的 Alekseev 公式对非线性中立型系统进行了研究, 得到一些简洁、实用的稳定性代数充分准则. 本文定理改进了文 [2] 的主要结果.

## 1 有关引理

**引理 1** 对于定义在区间  $[t_0 - \Delta, +\infty)$  ( $\Delta > 0$ ,  $t_0$  为实数) 上的连续的  $r$  维向量函数  $P(t) = (P_1(t), \dots, P_r(t))$ ,  $\dot{P}(t) = (\dot{P}_1(t), \dots, \dot{P}_r(t))$ , 若满足①  $P(t) < \dot{P}(t)$ ,  $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$ ; ② 存在一组常数  $k_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) 使  $k_i D P_i(t) \leq f_i(t, P(t), \sup_{t-\Delta} P(\theta))$  [或  $k_i D P_i(t) < f_i(t, P(t), \sup_{t-\Delta} P(\theta))$ ] ( $i = 1, \dots, r$ ),  $t > t_0$

且  $k_i D \dot{P}_i(t) > f_i(t, \dot{P}(t), \sup_{t-\Delta} \dot{P}(\theta))$  [或  $k_i D \dot{P}_i(t) \geq f_i(t, \dot{P}(t), \sup_{t-\Delta} \dot{P}(\theta))$ ] ( $i = 1, \dots, r$ ),  $t > t_0$

其中  $f(t, u, v)$  关于  $u$  拟单调增<sup>[3]</sup>,  $D P_i(t)$  表示  $P_i(t)$  的 Dini 导数. 则有

$$P(t) < \dot{P}(t) \quad t_0 < t < +\infty$$

**证明** 类似于文献 [3] 的引理 1 的证明. 从略.

## 2 基本不等式

下面将用引理 1 给出高维混合型微分差分不等式.

**定理 1** 对于定义在  $[t_0 - \Delta, +\infty)$  上的非负连续函数  $P_i(t)$  和正的连续函数  $g_i(t)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) 及一组常数  $a_i \geq 0$  ( $i \neq j, i, j = 1, \dots, r$ ),  $b_i \geq 0$  ( $i, j = 1, \dots, r$ ). 若存在  $k_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ),

\* 广东省自然科学基金 (1930250) 资助项目

收稿日期: 1996-04-22 贾保国, 男, 33 岁, 博士

$r)$ 使

$$k_i DP_i(t) \leq g_i(t) \sum_{j=1}^r [a_{ij} P_j(t) + b_{ij} P_j(t, \Delta)] \quad (i = 1, \dots, r), t > t_0 \quad (1)$$

其中  $a_{ii} + b_{ii} < 0 (i = 1, \dots, r)$ ,  $\Re \lambda(a_{ij} + b_{ij})_{\times r} < 0, P_j(t, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} P_j(\theta + t)$ , 则存在常数  $k \geq 1, T > 0$  对任意  $l > 0$ , 存在  $T(l) > 0$  使

$$P_i(t) \leq k T_i \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) \exp(-T(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \quad (i = 1, \dots, r), t \geq t_0 \quad (2)$$

这里  $\lambda(t) = \min_{1 \leq i \leq r} g_i(t), t \geq t_0, h(u) = \min\{\lambda(u), l\}$

证明 先说明几个基本事实.

① 设  $f_i(t, P(t), P(t, \Delta)) = g_i(t) \sum_{j=1}^r [a_{ij} P_j(t) + b_{ij} P_j(t, \Delta)] (i = 1, \dots, r), t > t_0$ , 其中  $P(t) = (P_1(t), \dots, P_r(t))$ , 由  $a_{ii} \geq 0 (i \neq j, i, j = 1, \dots, r), b_{ij} \geq 0 (i, j = 1, \dots, r)$  易知  $f(t, u, v) = (f_1(t, u, v), \dots, f_r(t, u, v))$  关于  $u$  拟单调增.

② 由假设知:  $(a_{ij} + b_{ij})_{\times r}$  是稳定的  $M$  矩阵, 从而它是拟负对角占优的<sup>[4]</sup>, 故存在  $T_i > 0$  使

$$\sum_{j=1}^r (a_{ij} + b_{ij}) T_j < 0 \quad (i = 1, \dots, r)$$

不难看出, 对任意固定的  $l > 0$ , 由函数连续性知, 存在充分小的  $T(l) > 0$  使

$$T(l) k_i T_i \sum_{j=1}^r [a_{ij} T_j + b_{ij} T_j e^{T(l)\Delta}] < 0 \quad (i = 1, \dots, r) \quad (3)$$

③ 记  $h(u) = \min\{\lambda(u), l\}$ , 当  $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$  时, 有  $\int_{t_0}^t h(u) du \geq 0$ , 从而存在  $k \geq 1$  使

$$k T_i \exp(-T(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \geq k T_i > 1, t \in [t_0 - \Delta, t_0] \quad (4)$$

④ 由于当  $t \geq t_0 - \Delta$  时, 函数  $\exp(-T(l) \int_{t_0}^t h(u) du)$  关于  $t$  递减且  $\int_{t-\Delta}^t h(u) du \leq \Delta l, t > t_0$ , 从而有

$$\begin{aligned} \exp[-T(l) \int_{t_0}^t h(u) du + T(l)\Delta] &\geq \exp[-T(l) (\int_{t_0}^t h(u) du - \\ &\int_{t-\Delta}^t h(u) du)] = \\ \exp[-T(l) \int_{t_0}^{t-\Delta} h(u) du] &= \inf_{t-\Delta \leq \theta \leq t} \exp(-T(l) \int_{t_0}^{\theta} h(u) du) \end{aligned} \quad (5)$$

以下证明 (2) 式, 先证对任意  $\lambda > 0$  有

$$P_i(t) < k T_i \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \lambda \exp(-T(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \quad (i = 1, \dots, r), t > t_0.$$

令  $j_i(t) = k T_i \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \lambda \exp(-T(l) \int_{t_0}^t h(u) du), (i = 1, \dots, r), t > t_0$ , 现在证明

$j_i(t) (i = 1, 2, \dots, r)$  满足引理 1 的条件, 为此, 当  $t > t_0$  时, 对  $j_i$  求导得

$$k_i D j_i(t) = k k T_i \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \lambda (-T(l) h(t)) \exp(-T(l) \int_{t_0}^t h(u) du)$$

由于  $h(t) \leq \lambda(t) \leq g_i(t)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) 及 (3) 得

$$\begin{aligned} k_i D \dot{j}_i(t) &\geq k_i k \mathbb{T} \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N}(-\mathbb{T}(l)\lambda(t)) \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \geq \\ &(-\mathbb{T}(l)k \mathbb{T}) k \left[ \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N} g_i(t) \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \right] > \\ &\sum_{j=1}^r [a_{ij} \mathbb{T} + b_{ij} \mathbb{T} e^{\mathbb{T}(l)\Delta}] k \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N} g_i(t) \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) = \\ &g_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^r a_{ij} \mathbb{T} k \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N} \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \right\} + \\ &g_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^r b_{ij} \mathbb{T} k \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N} \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) + \mathbb{T}(l)\Delta \right\} \end{aligned}$$

由 (5) 得

$$\begin{aligned} k_i D \dot{j}_i(t) &> g_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^r a_{ij} \mathbb{T} k \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N} \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \right\} + \\ &g_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^r b_{ij} \mathbb{T} k \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N} \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) \right\} = \\ &f_i(t, \dot{j}(t), \sup_{t-\Delta} \dot{j}(\theta)), \quad t > t_0. \end{aligned}$$

其中  $\dot{j}(t) = (\dot{j}_1(t), \dots, \dot{j}_r(t))$ , 即  $k_i D \dot{j}_i(t) > f_i(t, \dot{j}(t), \dot{j}(t, \Delta))$ ,  $t > t_0$ , ( $i = 1, \dots, r$ )

由 (4) 及  $P_j(t, \Delta)$  的定义知

$$\begin{aligned} \dot{j}_i(t) &= \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \mathbb{N} k \mathbb{T} \exp(-\mathbb{T}(l) \int_{t_0}^t h(u) du) > \sum_{j=1}^r P_j(t_0, \Delta) + \\ &\mathbb{N} P_i(t) \quad (i = 1, \dots, r) \quad t \in [t_0 - \Delta, t_0] \end{aligned}$$

由于  $f(t, u, v)$  关于  $u$  拟单调增加, 从而  $P(t), \dot{j}(t)$  满足引理 1 的条件, 因此

$$P_i(t) < \dot{j}_i(t), \quad t > t_0 \quad (i = 1, \dots, r)$$

再令  $\mathbb{N} \rightarrow 0$  就得 (2) 式.

**推论** 设  $r$  是偶数,  $r = 2q$ ,  $g_i(t)$  ( $i = 1, \dots, q$ ) 是正的连续函数,  $P_i(t)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) 的定义如定理 1 所述, 在  $(t_0, +\infty)$  上满足

$$\begin{aligned} P_i(t) &\leq g_i(t) \sum_{j=1}^r [a_{ij} P_j(t) + b_{ij} \sup_{t-\Delta} P_j(\theta)] \quad (i = 1, \dots, q) \\ &\leq \sum_{j=1}^r [a_{ij} P_j(t) + b_{ij} \sup_{t-\Delta} P_j(\theta)] \quad (i = q+1, \dots, r) \end{aligned} \quad (6)$$

$a_{ij}, b_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, r$ ) 的假设同定理 1, 则存在  $k \geq 1, \mathbb{T}_i > 0, \mathbb{T}_0 \geq 0$  使

$$P_i(t) \leq k \mathbb{T} \sum_{j=1}^r \sup_{t_0-\Delta} P_j(\theta) \exp\{-\mathbb{T} \int_{t_0}^t \lambda(u) du\} \quad t \geq t_0 \quad (i = 1, \dots, r) \quad (7)$$

其中  $\lambda(u) = \min_{1 \leq i \leq q} \{g_i(u), 1\}$

**证明** 在定理 1 中当  $g_i(t) = 1$  ( $i = q+1, \dots, r$ ) 而当  $i = 1, \dots, q$  时  $k_i = 1$ . 当  $i = q+1, \dots, r$  时  $k_i = 0$ , 此时 (1) 式就变为 (6) 式, 从而定理 1 的条件满足, 因此存在  $k \geq 1, \mathbb{T}_i > 0$ , 对  $i = 1, \dots, q$ ,  $h(u) = \min_{1 \leq i \leq q} \{g_i(u), 1\} = \lambda(u)$  存在  $\mathbb{T}(l) = \mathbb{T}(1) = \mathbb{T}_0 \geq 0$  使 (7) 式成立.

下面将看出, 推论在研究中立型系统零解稳定性时起着相当重要的作用.

### 3 在变时滞非线性中立型系统中的应用

#### 考虑非线性中立型系统

$$\dot{x}(t) = g(t, x) + f[t, x(t), x(t - \Delta(t)), \dot{x}(t - \Delta(t))] \quad (8)$$

其中  $\Delta(t)$  在  $[t_0, +\infty)$  上是非负有界的连续函数,  $0 \leq \Delta(t) \leq \Delta$  是正常数,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $g \in C([t_0, +\infty) \times R^n, R^n)$ ,  $g(t, 0) \equiv 0$ ,  $f \in C([t_0, +\infty) \times R^n \times R^n \times R^n, R^n)$ ,  $f(t, 0, 0, 0) \equiv 0$ ,  $g(t, x)$  的雅可比矩阵连续. 初始条件为

$$x(t) = h(t), \dot{x}(t) = \dot{h}(t), t_0 - \Delta \leq t \leq t_0 \quad (9)$$

其中  $h(t), \dot{h}(t)$  在  $t_0 - \Delta \leq t \leq t_0$  上连续. 而且假设系统 (8) 满足初始条件 (9) 的解唯一存在.

定义 若存在常数  $k \geq 1, \lambda > 0$  使系统 (8) 满足初始条件 (9) 的解  $x(t, t_0, h)$  有

$$\|x(t, t_0, h)\| + \|\dot{x}(t, t_0, h)\| \leq k \|h\| e^{-\lambda(t-t_0)}, t \geq t_0$$

其中  $\|h\| = \sup_{t_0 - \Delta \leq t \leq t_0} \{\|h(t)\| + \|\dot{h}(t)\|\}$ , 则称系统 (8) 的零解大范围指数稳定.

下面引理是著名的 Alekseev 公式的推广, 其证明与 Alekseev 公式的证明类似<sup>[5]</sup>.

引理 2 设  $x(t, t_0, h)$  是系统 (8) 满足初始条件 (9) 的解,  $z(t, t_0, h(t_0))$  是  $\dot{z} = g(t, z)$  的满足初始条件  $z(t_0) = h(t_0)$  的解且  $x(t, t_0, h)$  和  $z(t, t_0, h(t_0))$  在  $[t_0, +\infty)$  上有定义, 则有

$$x(t, t_0, h) = z(t, t_0, h(t_0)) + \int_{t_0}^t H(t, s, x(s, t_0, h)) f(s) ds, t \geq t_0 \quad (10)$$

其中  $f(s) = f(s, x(s, t_0, h), x(s - \Delta(s), t_0, h), \dot{x}(s - \Delta(s), t_0, h))$ .

注: 当  $g(t, x) = A(t)x$  时, 设  $Z(s, t)$  ( $t_0 \leq s \leq t$ ) 是  $\dot{z} = A(t)z$  的基解矩阵且  $Z(s, s) = E$  (单位矩阵), (10) 式变为<sup>[5]</sup>

$$x(t, t_0, h) = Z(t, t_0) h(t_0) + \int_{t_0}^t Z(t, s) f(s) ds, t \geq t_0$$

上面公式称为常数变易公式,  $f(s)$  同引理 2 中所定义.

定理 2 设系统 (8) 满足下列条件

① 系统  $\dot{z} = g(t, z)$  的零解满足变分指数估计<sup>[3]</sup>且存得在  $\forall k > 0$  使对  $\forall t \geq t_0, \|z\| < \infty$

有

$\|g(t, z)\| \leq k \|z\|$ ; ②  $\|f(t, x(t), x(t - \Delta(t)), \dot{x}(t - \Delta(t)))\| \leq a(t) \|x(t)\| + b(t) \|x(t - \Delta(t))\| + c(t) \|\dot{x}(t - \Delta(t))\|$ ; ③ 矩阵  $\begin{bmatrix} -I & Ma' + Mb' & Mc \\ k + a + b & & -I + c \end{bmatrix}$  是稳定的. 其中  $M$  是

定义 2 中的常数,  $a(t), b(t), c(t)$  及  $a(t) |r(t)|, b(t) |r(t)|, c(t) |r(t)|$  连续有界,  $r(t)$  为定义中的负值函数,  $a = \sup a(t), b = \sup b(t), c = \sup c(t), a = \sup a(t) |r(t)|, b = \sup b(t) |r(t)|, c = \sup c(t) |r(t)|$ .

$\sup c(t) |r(t)|, t \geq t_0$ . 记  $\lambda(u) = \min\{-r(u), 1\}, u \geq t_0$ , 则有

i) 当  $\int_{t_0}^{+\infty} \lambda(u) du < +\infty$  时, (8) 的零解稳定<sup>[3]</sup>. ii) 当  $\int_{t_0}^{+\infty} \lambda(u) du = +\infty$  时, (9) 的零解渐近稳定<sup>[6]</sup>. iii) 当  $\lambda(u) \geq \lambda > 0$  ( $\lambda$  是常数) 时, (8) 的零解大范围指数稳定.

证明 令  $\dot{x}(t) = y(t)$ , 则  $\dot{x}(t - \Delta(t)) = y(t - \Delta(t))$ , 因此方程 (8) 可化为如下形式

$$y(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t), x(t - \Delta(t)), \dot{x}(t - \Delta(t)))$$

由条件①、②得:

$$\|y(t)\| \leq k \|x(t)\| + a(t) \|x(t)\| + b(t) \|x(t - \Delta(t))\| + c(t) \|y(t - \Delta(t))\| \leq k \|x(t)\| + a \|x(t)\| + b \|x(t - \Delta(t))\| + c \|y(t - \Delta(t))\|, t \geq t_0 \quad (11)$$

由引理 2 系统 (8) 的解满足

$x(t, t_0, h) = z(t, t_0, h(t_0)) + \int_{t_0}^t H(t, s, x(s, t_0, h)) f(s) ds, t \geq t_0$ . 其中  $f(s) = f(s, x(s), x(s - \Delta(s)), \dot{x}(s - \Delta(s)))$ . 为简单起见, 记  $x(t) = x(t, t_0, h)$  由①、②知

$$\|x(t)\| \leq M \|h(t_0)\| \exp \left\{ \int_{t_0}^t r(f) df \right\} + \int_{t_0}^t M \exp \left\{ \int_s^t r(f) df \right\} (a(s) \|x(s)\| + b(s) \|x(s - \Delta(s))\| +$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \exp \left\{ \int_s^t r(f) df \right\} (a(s) \|x(s)\| + b(s) \|x(s - \Delta(s))\| + c(s) \|y - \Delta(s)\|) ds, t > t_0 \\ & P(t) \triangleq \begin{cases} M_{t_0 - \sup_{t_0}} \|j(t)\|, & t_0 - \Delta \leq t \leq t_0 \\ M_{t_0 - \sup_{t_0}} \|j(t)\| \exp \left\{ \int_{t_0}^t r(f) df \right\} + \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

由 (12) 式易知

$$\|x(t, t_0, j)\| \leq P(t), \quad t \geq t_0 - \Delta \quad (13)$$

当  $t > t_0$  时,对  $P(t)$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= r(t)M\left[\sup_{t_0 \leq s \leq t} \|j(s)\|\right] \exp\left\{\int_{t_0}^t r(s)ds\right\} + \\ &+ r(t) \int_{t_0}^t M \exp\left\{\int_s^t r(s)ds\right\} (a(s)\|x(s)\| + \\ &+ b(s)\|x(s-\Delta(s))\| + c(s)\|y(s-\Delta(s))\|) ds + M(a(t)\|x(t)\| + b(t)\|x(t-\Delta(t))\| + \\ &+ c(t)\|y(t-\Delta(t))\|) = r(t)P(t) + M[a(t)\|x(t)\| + b(t)\|x(t-\Delta(t))\| + \\ &+ c(t)\|y(t-\Delta(t))\|], \quad t > t_0 \end{aligned}$$

由 (13)、(11) 及  $P(t-\Delta(t)) \leq \sup_{t_0 \leq s \leq t} P(\theta)$ ,  $\|y(t-\Delta(t))\| \leq \sup_{t_0 \leq s \leq t} \|y(\theta)\|$  得

$$\dot{P}(t) \leq r(t)P(t) + Ma(t)P(t) + Mb(t) \sup_{t_0 \leq s \leq t} P(\theta) + Mc(t) \sup_{t_0 \leq s \leq t} \|y(\theta)\|, \quad t > t_0$$

(14)

$$\|y(t)\| + kP(t) + aP(t) + b_{\sup} \sup_{t \in [t_0, t]} P(\theta) + c_{\sup} \sup_{t \in [t_0, t]} \|y(\theta)\|, t > t_0 \quad (15)$$

从而

$$\dot{P}(t) \leq -r(t) \left[ -P(t) + \frac{Ma(t)}{-r(t)} P(t) + \frac{Mb(t)}{-r(t)} \sup_{t \in \mathbb{J}} P(\theta) + \frac{Mc(t)}{-r(t)} \sup_{t \in \mathbb{J}} \|y(\theta)\| \right]$$

由②及  $r(t) < 0$  推得

$$\|P(t) - r(t)\| \leq \| -P(t) + Ma'P(t) + Mb'_{\sup}P(\theta) + Mc'_{\sup}\| \|y(\theta)\| \quad (16)$$

令  $P_1(t) = P(t), P_2(t) = \|y(t)\|, \exists t_0 - \Delta, g_1(t) = -r(t), \exists t_0$ , 并记  $a_{11} = -1 + Ma', a_{12} = 0, a_{21} = k + a, a_{22} = -1, b_{11} = Mb', b_{12} = Mc', b_{21} = b, b_{22} = c$  则 (15), (16) 可化成形式

$$\dot{P}_1(t) \leq g_1(t) [a_{11} P_1(t) + a_{12} P_2(t) + b_{11} \sup_{t-\delta_1 \leq \theta \leq t} P_1(\theta) + b_{12} \sup_{t-\delta_2 \leq \theta \leq t} P_2(\theta)], \quad t \geq t_0 \quad (17)$$

$$\leq a_{21}P_1(t) + a_{22}P_2(t) + b_{21} \sup_{t \in [t_0, t]} P_1(\theta) + b_{22} \sup_{t \in [t_0, t]} P_2(\theta), \quad t \geq t_0 \quad (18)$$

由条件③知:  $(a_{ij} + b_{ij})_{k+1}^{k+2} = \begin{bmatrix} -1 & Ma' & Mb' & Mc' \\ k+1 & a+b & & -1 \end{bmatrix}$  是稳定矩阵, 从而  $\operatorname{Re} \lambda(a_{ij} + b_{ij})_{k+1}^{k+2} < 0$ . 由 (17)、(18) 及推论 (这里  $r=2, q=1$ ) 则知存在  $N > 1, \tau > 0$  使

$$\|P_i(t)\| \leq N \sup_{t_0 \leq \theta \leq t_0} [\|P_1(\theta)\| + \|P_2(\theta)\|] \exp\{-T \int_{t_0}^t \lambda(u) du, t \geq t_0, i = 1, 2$$

其中  $\lambda(u) = \min\{g_1(u), 1\} = \min\{-r(u), 1\}$ ,  $u \geq t_0$

$$\text{即} \quad \|P(t)\| \leq N \sup_{t_0 \leq \theta \leq t_0} [\|P(\theta)\| + \|y(\theta)\|] \exp\{-T \int_{t_0}^t \lambda(u) du\}, t \geq t_0$$

$$\|y(t)\| \leq N_{t_0} \sup_{t \in [t_0, t]} [\|P(\theta)\| + \|y(\theta)\|] \exp\{-\int_{t_0}^t \lambda(u) du\}, t \geq t_0$$

因此由 (13) 得  $\|x(t)\| + \|\dot{x}(t)\| \leq \|P(t)\| + \|y(t)\| \leq$

$$2N \sup_{t_0 - \frac{1}{2N} \leq t \leq t_0} [\|P(\theta)\| + \|y(\theta)\|] \exp\{-T \int_{t_0}^t \lambda(u) du\} \leq$$

$$2N \left\{ \sup_{t_0 \leq t} \|P(\theta)\| + \sup_{t_0 \leq t} \|y(\theta)\| \right\} \exp \left\{ -T \int_{t_0}^t \lambda(u) du \right\} \leq \\ 2N(M+1) \sup_{t_0 \leq t} [\|h(\theta)\| + \|\dot{h}(\theta)\|] \exp \left\{ -T \int_{t_0}^t \lambda(u) du \right\}, t \geq t_0$$

故存在  $L \geq 2N(M+1)$  使

$$\|x(t, t_0, h)\| + \|\dot{x}(t, t_0, h)\| \leq \\ L \sup_{t_0 \leq t} [\|h(\theta)\| + \|\dot{h}(\theta)\|] \exp \left\{ -T \int_{t_0}^t \lambda(u) du \right\}, t \geq t_0 \quad (19)$$

由定义知结论 i)~ iii) 成立.

## 参 考 文 献

- 1 Halanay A. Differential Equations Stability, Oscillations, Time Lags. New York and London Academic Press, 1965. 377
- 2 斯力更, 章毅. 具有变量时滞的非线性中立型系统的稳定性. 科学通报, 1986, 20: 1527~ 1530
- 3 贾保国. 无穷时滞中立型系统零解的稳定性. 中山大学学报 (自然科学版), 1996, 35(4): 31~ 36
- 4 Siljak D D. Large Scale Dynamic Systems Stability and Structure. New York North-Holland, 1978. 394~ 404
- 5 Reissig R, Sansone G, Conti R. Nonlinear Differential Equations of High Order. Noorhff International Publishing, 1974. 152~ 154
- 6 Lasalle J P. The Stability of Dynamical Systems. New York Springer-verlag, 1976. 13~ 20

## A Differential Difference Inequality with a Bounded Delay in Higher Dimensional Spaces and Its Application

Jia Baoguo<sup>\*</sup>

**Abstract** Get a Differential Difference Inequality with a Bounded Delay in higher dimensional spaces. Then by means of the inequality and the improved Alekseev formula research the stability of zero solutions of a class of nonlinear neutral systems with a changable delay.

**Keywords** quasi-monotone increasing function, exponential stability, asymptotical stability

<sup>\*</sup> Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275