

# 非严格双曲型方程组大范围解存在性<sup>\*</sup>

叶小平

(中山大学数学系, 广州 510275)

**摘 要** 用粘性消失方法证明了非线性非严格双曲型聚合物方程组 Cauchy 问题大范围弱解的存在性, 而该解属于有界变差函数类.

**关键词** 非严格双曲组, 粘性消失方法, 有界变差解

**分类号** O 175. 29

文献 [1, 2] 提出并讨论了如下方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} s + f(s, c)_x &= 0, & s(x, 0) &= s_0(x) \\ (sc)_t + (cf(s, c))_x &= 0, & (sc)(x, 0) &= (s_0, c_0)(x) \end{aligned} \quad (1)$$

其中要求存在  $W$  ( $0 < W < 1$ ) 使有

$$W \leq s_0(x) \leq 1 \quad 0 \leq c_0(x) \leq 1 \quad (2)$$

这里  $s(x, t)$  为水相饱和度,  $c(x, t)$  为水相中聚合物浓度,  $f(s, c)$  通常是分级流函数. (1), (2) 式在石油开采和弹性力学等方面有较多应用<sup>[1-4]</sup>.

(1) 对应的特征值为  $\lambda_1 = f_s, \lambda_2 = f/s$ . 在相平面曲线  $f_s = f/s$  上 (1) 不是严格双曲的, 也不是真正非线性.

文献 [1, 2] 研究了 (1) 的 Riemann 问题; 文 [5] 应用 Glimm 格式讨论了 (1), 得到有界可测弱解的存在性; 文 [6] 采用迎风格式在假设初值有较强光滑性的情形得到某种耦合解的存在唯一性; 文 [7] 利用 Glimm 格式和 Godnov 格式得到 (1) 在弱解意义下等价方程组熵解的存在、连续依赖和唯一性.

为方便基本结果的表述及行文, 引入以下概念和记号:

记  $C_T = R \times [0, T]$ ,  $Q_{XT} = [-X, X] \times [0, T]$  ( $X > 0, T > 0, R$  为全体实数的集合)

$$BV = \{u(x) \mid u \in L^1_{loc}(R): TV(u) < +\infty\}$$

而

$$TV(u) = \sup_{h>0} \int_R \frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|} dx$$

按通常意义规定函数  $s(x, t)$  和  $c(x, t)$  是 (1) (2) 的弱解, 例如见文献 [5].

另外按文 [5, 6] 的要求假设  $f(s, c)$  满足:

$$f(W, c) = 0, \quad f(1, c) = 1 \quad \forall c \in [0, 1] \quad (3)$$

本文的主要结果是下面定理 1.

<sup>\*</sup> 收稿日期: 1997-03-11 叶小平, 男, 41岁, 讲师

定理 1 设  $f(s, c)$  有连续二阶偏导并满足 (3), 而  $s_0(x), c_0(x), c_{0x}(x)$  属于  $BV$  且满足 (2), 则问题 (1) 在  $C_T$  上存在弱解  $s(x, t), c(x, t)$  并且成立

$$\text{i) } \quad \forall s \leq 1, \quad \forall c \leq 1 \quad (4)$$

$$\text{ii) } \quad TV(c(\cdot, t)) \leq TV(c_0) \quad (5)$$

$$TV(s(\cdot, t)) \leq (TV(s_0) + \frac{1}{2})e^{2t} \quad (6)$$

$$\text{iii) } \quad \int_R |s(x, t + \Delta t) - s(x, t)| dx \leq m_1 \Delta t \quad (7)$$

$$\int_R |c(x, t + \Delta t) - c(x, t)| dx \leq m_2 \Delta t \quad (8)$$

$$\text{iv) } \quad \|c(x, \cdot, t)\|_\infty \leq W^{-1} \|c_{0x}\|_\infty$$

$$TV\left(\frac{c}{s}(\cdot, t)\right) \leq TV\left(\frac{c_{0x}}{s_0}\right) \quad (9)$$

其中,  $T$  为任意给定正实数;  $t \in [0, T], \Delta t > 0$  而  $\frac{1}{2}, m_1, m_2$  仅与  $s_0, c_0, c_{0x}, f$  及  $T$  有关的正常数.

本文使用的基本是“粘性消失方法”. 由 (1) 本身性质只需考虑如下非守恒型抛物组

$$s_t + f_x - X_{sxx} = 0, \quad s(x, 0) = s_0(x) \quad (10)$$

$$c_t + g_c - X_{cxx} = 0, \quad c(x, 0) = c_0(x) \quad (11)$$

其中  $g(s, c) = f/s$  (以下均做如此假设).

由压缩映像原理可得如下引理 1.

引理 1 设  $s_0(x), c_0(x)$  充分光滑且有紧支, 则存在  $t_0 > 0$  使在  $C_{t_0}$  上 (10), (11) 式存在唯一古典解  $s(x, t), c(x, t)$  并且  $s, c$  本身及其一、二阶偏导有界.

引理 2 设  $c(x, t)$  是引理 1 所确定解  $(s, c)$  的分量  $c$ , 则当  $c \leq c_0(x) \leq 1$  时成立

$$c \leq c(x, t) \leq 1 \quad (12)$$

证明 对 (11) 做变换  $c = ue$  则有  $u_t + gu_x + u - X_{uux} = 0$ .

为证  $e \geq 0$ , 只须证对任意  $(\bar{x}, \bar{t}) \in C_{t_0}$  有  $u(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$  为此作函数

$$p(x, t) = u(x, t) + T v(x, t)$$

其中,  $v(x, t) = e^{(U_1 + 1)x^2 + U_2 t}$ ,  $T = e v(\bar{x}, \bar{t})^{-1}$ .

而  $U_1, U_2$  为待定实数,  $e$  为任意正数;

又定义算子  $\mathcal{L}$  对任光滑函数  $h(x, t)$

$$\mathcal{L}h = \frac{\partial}{\partial t} h + g \frac{\partial}{\partial x} h + h - X_{hxx}$$

则有:  $\mathcal{L}v = v \{ (U_1 x^2 + U_2) + 2g(U_1 + 1)x + 1 - 2X(U_1 + 1) - 4X(U_1 + 1)^2 x^2 \}$   
 $v \{ [U_1 - 2\|g\|_\infty (U_1 + 1) - 4X(U_1 + 1)^2] x^2 +$   
 $[U_2 + 1 - 2(U_1 + 1) - 2X(U_1 + 1)] \}$

取  $U_1 \geq 4(\|g\|_\infty + 4X)$ ,  $U_2 \geq 4(1 - X) - 1, 0 < t < \frac{1}{\lambda_1} = \tilde{t}$ .

则有  $\mathcal{L}v \geq 0$ , 从而  $\mathcal{L}p = \mathcal{L}u + T\mathcal{L}v \geq 0$ .

当  $t = 0$  时,  $p(x, 0) = u(x, 0) + T v(x, 0) = c_0 + T e^2 > 0$ .

由引理 1,  $c$  在  $C_{t_0}$  上有界, 取  $L > 0$  充分大使得  $\|c\|_\infty e^{-L^2} \leq T$ .

所以  $p(\pm L, t) = u(\pm L, t) + T e^{(U_1 + 1)L^2 + U_2 t} \geq e^{L^2} T - \|c\|_\infty \geq 0$

由最大值原理可知在  $Q_{\bar{t}}$  上  $p(x, t) \geq 0$ , 而  $L > 0$  任意, 在  $C_{\bar{t}}$  上  $p(x, t) \geq 0$ .

若  $(\bar{x}, \bar{t}) \in C_{\bar{t}}$ , 则  $p(\bar{x}, \bar{t}) = u(\bar{x}, \bar{t}) + Tv(\bar{x}, \bar{t}) = u(\bar{x}, \bar{t}) + \geq 0$

若  $\bar{t} > \tilde{t}$ , 可设  $c = ue^{-t-\tilde{t}}$  类似得到在  $C_{\bar{t}}$  上  $p(x, t) \geq 0$ . 如此经有限步骤可得上式.

由  $e > 0$  的任意性, 即有  $u(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$ .

同理可得  $c(x, t) \leq 1 \quad (\forall (x, t) \in C_{t_0})$ .

引理 3 设  $s(x, t)$  是引理 1 所得解的  $s$  分量, 若有  $\forall s_0 \leq 1 \quad (0 < W < 1)$  则成立

$$\forall s(x, t) \leq 1 \quad (x, t) \in C_{t_0} \quad (13)$$

证明 由 (5) 可得

$$f_c(s, c) = f_c(s, c) - f_c(W, c) = f_{cs}(a, c)(s - W)$$

$$f_c(s, c) = f_c(s, c) - f_c(1, c) = f_{cs}(Y, c)(s - 1)$$

从而由 (10) 式有

$$\bar{s} + f_{s\bar{s}} + f_{cs}(a, c)\bar{s} - X_{\bar{s}x} = 0 \quad \bar{s}(x, 0) = \bar{s}_0(x)$$

$$\bar{\bar{s}} + f_{s\bar{\bar{s}}} + f_{cs}(Y, c)\bar{\bar{s}} - X_{\bar{\bar{s}}x} = 0 \quad \bar{\bar{s}}(x, 0) = \bar{\bar{s}}_0(x)$$

其中  $W < a < s \quad s < Y < 1$

而  $\bar{s} = s - W, \bar{s}_0 = s_0 - W; \quad \bar{\bar{s}} = 1 - s, \quad \bar{\bar{s}}_0 = 1 - s_0$

按引理 2 的证明方法就可得到 (13) 式.

由引理 1-3 按经典做法就有如下引理 4

引理 4 在引理 1 的条件下, 若 (5) 式成立, 则对任意  $T > 0$ , 式 (10) (11) 在  $C_T$  上存在唯一古典解  $s, c$  满足 (12) (13) 式.

引理 5 设  $c(x, t)$  由引理 4 确定, 则成立

$$\int_R \left| \frac{\partial}{\partial x} c(x, t) \right| dx \leq \int_R \left| \frac{d}{dx} c_0(x) \right| dx \quad (14)$$

其中  $X$  为任给正数,  $x \in [0, T], (T > 0)$ .

证明 将  $c + g_{cx} - X_{cx} = 0$  两端关于  $x$  求导得

$$(c)_t + (g_{cx})_x - X_{(cx)}_{xx} = 0$$

任取  $T \in [0, 1]$ , 由上式可得

$$(c - T)_t + [g(c - T)]_x + Tg_x - X_{(c - T)}_{xx} = 0$$

设  $E_T = \{(x, t) \in Q_{XT} | c - T \leq 0\}$  则有  $\text{mes } E_T = 0 \quad \text{a. e. 于 } T \in [0, 1]$ .

设非负  $h(x, t) \in \tilde{\omega}$  且  $\text{supp } h \subset Q_{XT}$ , 以  $h \cdot \text{sgn}(c - T)$  乘以上式在  $Q_{XT} \setminus E_T$  上:

$$[(c - T)_t + (g|c - T|)_x + Tg_x \text{sgn}(c - T) - X_{c - T}_{xx}] h \leq 0 \quad (15)$$

设  $E_T(t)$  为  $E_T$  的“ $t$ -水平集”( $t \in [0, T]$ ), 则有  $[-x, x] \cap E_T = \sum_k (a^k, b^k), (a^k, b^k)$  互相不交.

对 (15) 式在  $Q_{XT}$  上积分并对各项应用分步积分后令  $T \rightarrow 0+$  则有

$$\int_{|x| \leq X} |c(x, T)| h(x, T) dx - \int_{|x| \leq X} |c(x, 0)| h(x, 0) dx - \iint_{Q_{XT}} c \{ h_t - h - X_{hx} \} dx dt \leq 0 \quad (16)$$

取  $W_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|^2}, Z(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| \geq 2 \end{cases}$  且  $Z(x) \in \tilde{\omega}([-X, X])$ .

则  $0 \leq W_\lambda(x) \leq 1$ ,  $| (W_\lambda(x))'_x | \leq \lambda W_\lambda(x)$ ,  $| (W_\lambda(x))_{xx} | \leq \lambda(\lambda+1)W_\lambda(x)$ ,  $Z(\frac{x}{N}) \leq M_0$ ,

$$\left| Z_x(\frac{x}{N}) \right| \leq \frac{M_1-1}{N}, \quad \left| Z_{xx}(\frac{x}{N}) \right| \leq \frac{M_2}{N^2} \quad (M \text{ 为正常数}, i=0,1,2, \lambda, N \text{ 为正参数}).$$

令  $h(x,t) = W_\lambda(x)Z(x/N)$  代入 (16) 式, 令  $\lambda \rightarrow 0^+$ ,  $N \rightarrow +\infty$  即得 (14) 式.

引理 6 在引理 4 条件下成立

$$\|c_x\| \leq W^1 \|c_{0x}\|_\infty$$

$$\int_R \left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c}{s} \right) \right| dx \leq \int_R \left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_0}{s_0} \right) \right| dx$$

证明 将 (11) 式两端关于  $x$  求导并令  $r = c/s$ , 由 (10) 式得

$$r_t + (g - 2X \frac{S_x}{S})r_x - X_{xx} = 0, \quad r(x, 0) = r_0(x) = \frac{c_0}{s_0}$$

这是与 (11) 同型的问题, 应用证明引理 2, 4 的方法即证得本引理.

引理 7 在引理 4 条件下列成立:

$$\int_R \left| \frac{\partial}{\partial x} s(x,t) \right| dx \leq \left\{ \int_R \left| \frac{ds_0}{dx} \right| dx + 1 \right\} e^t \quad (17)$$

证明 将  $s_t + f_x - X_{xx} = 0$  两端关于  $x$  求导则有

$$(s_x)_t + (f_x s)_x + (f c c_x)_x - X_{sxx} = 0$$

与引理 5 的情形类似, 由

$$\iint_{Q_{XT}} \{ |s_x - T|_t + (f_s |s_x - T|)_x + T(f_s)_x \operatorname{sgn}(s_x - T) +$$

$$[f c \operatorname{sgn}(s_x - T)]_x - X_{sxx} \} h dx dt = 0$$

可以得到

$$\int_{|x| \leq X} |s_x(x, T) - T| h(x, T) dx - \int_{|x| \leq X} |s(x, 0) - T| h(x, 0) dx \leq$$

$$\iint_{Q_{XT}} \{ |s_x - T| [h_s f_s h - X_{hx}] + f c c_x \operatorname{sgn}(s_x - T) h -$$

$$T(f_s)_x \operatorname{sgn}(s_x - T) h \} dx dt + \int_0^T \left\{ \sum_k |h f c c_x \operatorname{sgn}(s_x - T)| \frac{b_k}{d_k} \right\} dt \quad (18)$$

其中,  $\forall t \in [0, 1]$ , 非负  $h \in C^0(\overline{Q_{XT}})$ ,  $s_x - T$  在  $(a_k, b_k)$  内定号, 在  $a_k, b_k$  处为零 ( $k=1, 2, \dots$ ).

设上式最后一项积分号下和式为  $I$ , 由于

$$|h f c c_x \operatorname{sgn}(s_x - T)| \frac{b_k}{d_k} \leq |f[s(b_k), c(b_k)] - f[s(a_k), c(a_k)]| \cdot |h(b_k) c_x(b_k)| +$$

$$|f c[s(a_k), c(a_k)]| \cdot |h(b_k) c_x(b_k) - h(a_k) c_x(a_k)| \leq \|h c_x\|_\infty I_1 + \|f c\|_\infty I_2$$

而

$$I_1 \leq \|f c\|_\infty \|s(b_k) - s(a_k)\| + \|f c\|_\infty \|c(b_k) - c(a_k)\|$$

$$I_2 \leq \|h\|_\infty \|c_x(b_k) - c_x(a_k)\| + \|c_x\|_\infty \|h(b_k) - h(a_k)\|$$

令  $M_f = \sup_B \{|f_s|, |f_c|, |f_{ss}|, |f_{sc}|, |f_{ac}|\}$ , 其中  $B = \{0 \leq s \leq 1, 0 \leq c \leq 1\}$

$$\text{则有 } \leq \|h c_x\|_\infty M_f \sum_k |s(b_k) - s(a_k)| + \sum_k |c(b_k) - c(a_k)| +$$

$$M_f \{ \|h\|_\infty \sum_k |c_x(b_k) - c_x(a_k)| + \|c_x\|_\infty \sum_k |h(b_k) - h(a_k)| \}$$

由引理 5 和引理 6 即知

$$\leq M_f \|h\|_\infty \left\{ \|r_0\|_\infty \int_R \left| \frac{\partial c_0}{\partial x} \right| dx + \int_R \left| \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right| dx \right\} + \\ M_f \|h\|_\infty 2 \|r_0\|_\infty \int_R \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| dx + M_f \|r_0\|_\infty \int_{|x| \leq X} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| dx$$

现设  $h(x, t) = W_\lambda(x) Z(x/N)$  为引理 5 中所给, 特别取  $\lambda = 1/N \leq 1/X$ , 则有

$$\int_{|x| \leq X} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| dx \leq (\lambda W_\lambda(x) M_0 + M_1 \frac{1}{N}) \cdot 2X \leq 2(M_0 + M_1)$$

将  $I$  的估计式代入式 (18) 并取上述  $h$ , 令  $T \rightarrow +\infty$  最终有

$$\int_R \left| \frac{\partial s}{\partial x} \right| dx \leq \int_R \left| \frac{\partial s_0}{\partial x} \right| dx + \int_0^T \int_R \left| \frac{\partial}{\partial x} s(x, t) \right| dx dt$$

其中,  $\alpha_2 = 2M_f \|r_0\|_\infty$ ,

$$\alpha_1 = M_f M_0 \left\{ \|r_0\|_\infty \int_R \left| \frac{\partial c_0}{\partial x} \right| dx + \int_R \left| \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right| dx + 2 \|r_0\|_\infty (M_0 + M_1) \right\} T$$

由 Gronwall 不等式即得 (17) 式.

引理 8 在引理 4 条件下,  $\forall t \in \tilde{C}_0^{\infty}(Q_T)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\Delta t > 0$  成立

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{|x| \leq X} h[s(x, t + \Delta t) - s(x, t)] dx \leq (\|h\|_\infty M + \|h\|_\infty) \\ \left\{ \int_{|x| \leq X} \left| \frac{ds_0}{dx} \right| dx + \alpha_1 e^{2T} + M_f \|h\|_\infty \int_{|x| \leq X} \left| \frac{dc_0}{dx} \right| dx \right. \quad (19)$$

$$\left. + \int_R \left| \frac{\partial c}{\partial t} \right| dx + M_f \int_{|x| \leq X} \left| \frac{dc_0}{dx} \right| dx + \int_R \left| \frac{dr_0}{dx} \right| dx + \|r_0\|_\infty \int_R \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| dx \right\} \quad (20)$$

证明 由 (11) 式以及引理 5, 6 可得证 (20).

而  $\frac{1}{\Delta t} \int_{|x| \leq X} h[s(x, t + \Delta t) - s(x, t)] dx \leq$

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} \left\{ M_f \|h\|_\infty \left[ \int_{|x| \leq X} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| dx + \int_{|x| \leq X} \left| \frac{\partial c}{\partial x} \right| dx \right] + \|h\|_\infty \int_{|x| \leq X} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| dx \right\} dt$$

由引理 5, 7 即得 (18) 式.

命题 在定理 1 条件下 (10), (11) 的解列  $\{s^X, c^X\}$  在  $C_T$  上存在收敛子列, 而极限函数  $(s, c)$  满足 (4)~(9).

证明 只须证极限函数满足 (7).

设  $h = h_X$  为  $\text{sgn}(s(x, t + \Delta t) - s(x, t))$  的光滑化, 则有

$$h_X \rightarrow \text{sgn}(s(x, t + \Delta t) - s(x, t)) \quad X \rightarrow 0, (x, t) \in C_T;$$

$$\|h\| \leq 1, \| (h_X)_x \|_\infty \leq \frac{\tilde{M}}{X} \quad (\tilde{M} \text{ 是与 } X \text{ 无关的正数}).$$

将上述估计式代入 (19) 式, 令  $X \rightarrow 0$  可得证 (7) 式.

定理 1 的证明

设  $\{s^X, c^X\}$  是命题中收敛子列且  $(s^X, c^X) \rightarrow (s, c) \quad X \rightarrow 0$  a. e. 于  $(x, t) \in C_T$

按标准做法得

$$\iint_{C_T} (s h_X + f h_X) dx dt = 0 \quad (\forall h_X \in \tilde{C}_0^{\infty}(C_T))$$

由引理 5, 6 可知  $C(x, t)$  有所需的光滑性, 再结合 (10) 有

$$(c^X)_x h_X + (c^X)_t h_X - X c^X h_{Xx} = s^X (h_X)_x + f (h_X)_x - X s^X (c^X)_{xx} - 2 X s^X (c^X)_x h_X$$

注意到  $h \in W_0^{1,1}(C_T)$ , 而  $W_0^{1,1}(C_T) \subset \overline{C_0^\infty(C_T)}$ , 将上式在  $C_T$  积分得

$$\iint_{C_T} \{ (sX) h_t - (cX) h - X(sX) h_x \} dx dt = - 2X \iint_{C_T} sX(cX)_x h dx dt$$

注意到引理 3, 6, 令  $X \rightarrow 0$  即有

$$\iint_{C_T} \{ (sc) h_t - (cf) h \} dx dt = 0.$$

## 参 考 文 献

- 1 Isaacson E. Analysis of a singular hyperbolic system of conservation laws. J Diff Eqns, 1986, 65: 250~ 268
- 2 Keyfitz B L, Kranzer H. A system of nonstrictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory. Arch Rat Anal, 1980, 72: 291~ 341
- 3 Pope G A. The application of fractional flow theory to enhanced oil recovery. Soc Pet Eng J, 1980, 20: 191~ 205
- 4 Johansen T, Winther R. The solution of the Riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modelling polymer flooding. SIAM J Math Anal, 1988, 19: 541~ 566
- 5 Temple B. Global solution of the Cauchy problem for a class of  $2 \times 2$  nonstrictly hyperbolic conservation laws. Adv in Appl Math, 1982, 3: 335~ 375
- 6 Trivelpiece A, Winther R. Existence, uniqueness and continuous dependence for a system of hyperbolic conservation laws modelling polymer flooding. SIAM J Math Anal, 1990(4): 905~ 933
- 7 Lin Longwei, Temple B, Wang Jinghua. On the convergence of Glimm's method and Godunov's method when wave speeds coincide. Pitman Monographs, 1992, 273: 241~ 247

## Existence of Global Solution for a Nonstrictly Hyperbolic System of Conservation Laws

Ye Xiaoping\*

**Abstract** The main contribution of this paper is to use the viscosity method to obtain the global weak solution for a nonstrictly hyperbolic system and that the solution belongs to BV space.

**Keywords** nonstrictly hyperbolic system, viscosity method, solution of bounded variation

\* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275