

边界控制下一类系统能控性及神经网络实现^{*}

张丽华

姜丽帆

(湛江海洋大学,广东湛江 524025) (中山大学计算机科学系)

摘 要 应用对耦合系统的一种分解方法,得到线性分布参数系统的状态与边界控制之间的定量关系,使得能控对域可以用显式表示出来,进而可分析系统的能控性问题,并讨论了在神经网络上实现的可能性.

关键词 边界控制,能控对域,神经网络

分类号 TP 236

分布参数控制系统要能真正在工程实践中实现,首先必需设法使得达到控制目标的控制规律能尽量简明具体,并能得到生成方法.因此,象边界控制、集中控制及点控制等方式显得越来越重要.本文将研究在时间规律上可由 Fourier 级数有限逼近的这样广泛一类边界控制下的线性分布参数系统的能控性的有关问题,通过应用文 [1]中所述框架及算子半群理论与技巧,得到控制与状态的定量关系,进而确定达到能控性目的的具体控制表达式,进一步讨论其在神经网络上实现的可能性.

1 预备引理

考虑在 Hilbert 空间 X 上的发展方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t), t \in (0, T), \quad x(0) = x_0 \in X \quad (1)$$

这里 $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in X = X_1 \times X_2$, $X_i (i = 1, 2)$ 是 Hilbert 空间; A 是 X 上的线性算子,具有如下的定义域:

$$D(A) = \{(x_1, x_2): x_i \in S_i \subset X_i, i = 1, 2\}.$$

引理 1^[2] 设 $A_i (i = 1, 2)$ 分别是 X_i 上的线性算子,且满足

(1) $D(A_2) = S_2, D(A_1) = \{\tilde{x}: \tilde{x}_1 = x_1 - F_{21}x_2, x_i \in S_i\}$, 其中 F_{21} 是 X_2 到 X_1 的有界线性算子;

(2) $A_i (i = 1, 2)$ 分别在 X_i 上生成 C_0 半群 $T^i(t)$;

(3) 算子 A 可分解为如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -F_{21} \\ O & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & F_{21}A_2 \\ O & O \end{bmatrix} \quad (2)$$

则算子 A 在 X 上生成 C_0 半群 $T(t)$, 它可表为:

^{*} 收稿日期: 1996-12-20 张丽华,女,42岁,讲师

$$T(t)x = \begin{pmatrix} T^1(t)(x_1 - F_{21}x_2) + F_{21}T^2(t)x_2 \\ T^2(t)x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

注 1 当 A 是 (2) 式右边第一项时, (1) 式的解可表为:

$$\begin{cases} x_2(t) = T^2(t)x_{20} \\ x_1(t) = T^1(t)(x_{10} - F_{21}x_{20}) + F_{21}T^2(t)x_{20} + \int_0^t T^1(t-s)(-F_{21}A_2T^2(s)x_{20})ds \end{cases} \quad (4)$$

2 主要结果

考虑如下系统

$$\begin{cases} \partial_{x_1}(t, \zeta) / \partial t = A_1 x_1(t, \zeta), \quad t \in (0, 1), \zeta \in \Omega \\ x_1(0, \zeta) = x_{10}(\zeta), \quad \partial_{x_1}(t, \zeta) / \partial \eta|_{\Gamma} = u(t, \zeta) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\partial/\partial\eta$ 表示 Ω 的边界 Γ 上的外法向.

令 $x_1(t) = x_1(t, \cdot)$, $x_{10} = x_{10}(\cdot)$, $u(t) = u(t, \cdot)$, 并设 X_1 是 Ω 上的 Hilbert 空间, Ω 是 R^n 中的有界开集, 具有充分光滑的边界, A_1 是 X_1 上的线性算子, $x_{10} \in X_1$; $\cup$ 是 Γ 上的 Hilbert 空间, $u(t) \in \cup$, $\forall t \in [0, 1]$. 则 (5) 式可写为:

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t), \quad t \in (0, 1), \quad x_1(0) = x_{10} \quad (6)$$

如果假设

$$\dot{u}(t) = F(x_2(t))g \triangleq h(t)g \quad (7)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t), \quad x_2(0) = x_{20} \quad (8)$$

其中 $x_2(t) \in R^{m-1}$, $F(x_2(t)) = h(t) \in R^1$, $g \in \cup$. 并假定:

(H) 对每个 $g \in \cup$, 存在唯一解 $G \in X_1$ 满足

$$A_0 G = 0, \quad \partial G / \partial \eta|_{\Gamma} = g, \quad \text{其中 } A_0 = A_1 \quad (9)$$

定义算子 $F_2: R^{m-1} \rightarrow X_1$: $F_2 x_2 = F(x_2)G$, 其中 G 满足 (9) 式. 此时按照引理 1 所述的框架, (6)~(8) 式可以耦合为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t), \quad x(0) = x_0 \quad (10)$$

其中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, A 如 (2) 式所示, 而 B 为 (2) 式右边的第二项乘以 -1 , 即如注 1 所述. 此外有

$$\begin{aligned} S_2 &= R^{m-1} = X_2 \\ S_1 &= \{x \in X_1: x_1 = F(x_2)g \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}, x \in R^{m-1}\} \end{aligned} \quad (11)$$

为了讨论能控性, 引入如下定义

定义 1 称 $(x_{10}, x_{11}) \in X \times X_1$ 为 (6) 式当控制 u 属于容许集合 U_{ad} 时在时间区间 $[0, 1]$ 内的能控对, 是指存在 $u \in U_{ad}$ 使得 (6) 式的具有初值 x_{10} 的解 $x_1(t)$ 满足 $x_1(t) = x_{11}$ 对某 $t \in [0, 1]$ 成立; 并称集合

$$C = \{(x_{10}, x_{11}): (x_{10}, x_{11}) \text{ 是上述的能控对}\} \quad (12)$$

为 $u \in U_{ad}$ 时在 $[0, 1]$ 内的能控对域.

现取 $x_2(t) = (1, \sin \pi t, \sin 2\pi t, \dots, \sin m\pi t) \in R^{m-1}$ (13)

$$F(x_2(t)) = \langle x_2(t), c \rangle_{R^{m-1}} \quad (14)$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^{m-1}}$ 表示 R^{m-1} 中的内积, $c = (c_0, c_1, \dots, c_m) \in R^{m+1}$.

故有 $x_{20} = (1, 0, 0, \dots, 0) \in R^{m-1}$, 及

$$F_2 x_2 = \langle x_2, c \rangle_{R^{m-1}} G, \quad G \in R^{m-1} \quad (15)$$

引入记号
$$K(t_1)G = [h(t_1) - \omega T'(t_1) - \sum_{i=1}^m G(I + A_1^2/i^2\pi^2)^{-1}(\sin \pi t_1 - (A_1/i\pi)(\cos \pi t_1 - T^1(t_1)))]G \quad (16)$$

$$C_1 = \{(x_{10}, x_{11}) \in X \times X : A_0 K^{-1}(t_1)(x_{11} - T^1(t_1)x_{10}) = 0 \text{ 对某个 } t \in [0, 1] \text{ 成立}\} \quad (17)$$

$$C_2 = \{g \in \bigcup : g = \partial K^{-1}(t_1)(x_{11} - T^1(t_1)x_{10})/\partial \mathcal{R}_\Gamma, (x_{10}, x_{11}) \in C_1\} \quad (18)$$

注 2 在 $x_2(t)$ 具体取为 (13) 式时, (8) 式中的 A_2 与 t 有关, 即 $A_2 = A_2(t)$, 但不妨碍应用 (4) 式, 此时可视 $T^2(t)$ 为 $A_2(t)$ 的强发展算子.

取 $U_{ad} = \{u : u(t) = \langle x_2(t), c \rangle \in \mathbb{R}^{m+1}, g \in C_2\}$, $D(A_1) = \{x : \tilde{x}_1 = x_1 - F_{21}x_2, x \in S_i, i = 1, 2\}$, 可得下面定理.

定理 如果 (H) 成立, A_1 及 $K(t_1)$ 是可逆的, A_1 在 X_1 生成可微半群 $T^1(t)$, 则在定义 1 的意义下, 能控对域由 $C = \bigcup_{c \in \mathbb{R}^{m+1}, t \in J} C_1$ 给出, 其中 $J = \{t \in [0, 1] : K(t) \text{ 可逆}\}$.

证明 由于 (10) 式属于引理 1 及注 1 所述的框架, 故由 (4) 式得到

$$x_1(t) - T^1(t)x_{10} = h(t)G - \omega T^1(t)G - \sum_{i=1}^m \left[G \int_0^t T^1(t-s) \sin \pi s \, ds \right] G \quad (19)$$

由于 $T^1(t)$ 是可微半群, 故可以推得如下关系:

$$\left[\int_0^t T^1(t-s) \sin \pi s \, ds \right] G = (\sin \pi t) G - (A_1 \int_0^t \sin(\pi s) T^1(t-s) \, ds) G \quad (20)$$

$$\left[\int_0^t T^1(t-s) \cos \pi s \, ds \right] G = [\cos \pi t - T^1(t)] G + (A_1 \int_0^t \cos(\pi s) T^1(t-s) \, ds) G \quad (21)$$

由 (20), (21) 式可推出

$$\left[\int_0^t T^1(t-s) \sin \pi s \, ds \right] G = (\sin \pi t) G - \left[A_1 \int_0^t T^1(t-s) \cos \pi s \, ds \right] G = (\sin \pi t) G - A_1/i\pi [\cos \pi t - T^1(t)] G - (A_1^2/i^2\pi^2 \int_0^t T^1(t-s) \sin \pi s \, ds) G \quad (22)$$

由 (22) 式即可得到

$$\left[\int_0^t T^1(t-s) \sin \pi s \, ds \right] G = (I + A_1^2/i^2\pi^2)^{-1} [(\sin \pi t) G - A_1/i\pi (\cos \pi t - T^1(t)) G] \quad (23)$$

由 (16), (19) 及 (23) 式便可得到

$$x_1(t_1) - T^1(t_1)x_{10} = K(t_1)G \quad (24)$$

对任意 $(x_{10}, x_{11}) \in C$, 令 $g = \partial K^{-1}(t_1)(x_{11} - T^1(t_1)x_{10})/\partial \mathcal{R}_\Gamma$, 由 C_1 的定义及 (H) 知道

$$G = K^{-1}(t_1)(x_{11} - T^1(t_1)x_{10}) \quad (25)$$

及 $g \in C_2$. 于是由 (24) 和 (25) 式得到 $x_1(t_1) = x_{11}$, 即 (x_{10}, x_{11}) 是能控对. 证毕.

令 $y = K^{-1}(t_1)x_{11}$, $f = A_0 K^{-1}(t_1)T^1(t_1)x_{10}$, $S = \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcup_{c \in \mathbb{R}^{m+1}, t \in J} C_{x_{10}}$

$$C_{x_{10}} = \{x_{11} \in X : x_{11} = K(t_1)y, A_0 y = f, \partial_y/\partial \mathcal{R}_\Gamma = g - \partial K^{-1}(t_1)T^1(t_1)x_{10}/\partial \mathcal{R}_\Gamma, \forall g \in \bigcup\}$$

那么, 通过分析集合 S 的性质, 就可讨论能控性问题.

3 用神经网络实现控制的可能性

由上述结果知道, 边界控制在 g 取定后, 作为时间的函数可由有限富氏级数逼近, 而在

人工神经网络理论中有如下的映照定理:

引理 2^[3] (映照定理) 给定任一个 $X > 0$, 一个连续函数矢量 $h(t): h(\cdot) = (h_1(\cdot), \dots, h_m(\cdot))^T: [0, 1]^m (\subset R^m) \rightarrow R^m$, 每个 h_i 满足 $\int_{[0, 1]^m} |h_i(t)| dt < \infty$. 则必定存在一个三层 $B-P$ 神经网络来逼近函数 h , 且使逼近误差在 X 之内.

该引理正是基于 h_i 可由富氏级数逼近这个事实, 因此只需证明任一正弦或余弦函数可由三层 $B-P$ 子网络来逼近就可以了. 事实上, 如在文 [3] 所述, 考虑该子网络有 n 个输入节点、 m 个隐节点和 1 个输出节点. 子网络的输出为

$$y = \sum_{j=1}^m w_j f \left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i - \theta_j \right) \triangleq \sum_{j=1}^m w_j f(u_j - \theta_j)$$

其中 w_j 是第 j 个隐单元到输出单元的权, w_{ij} 是第 i 个输入单元到第 j 个隐单元的权, θ_j 是第 j 个隐单元的阈值, f 为非线性连续可微函数 $f(z) = 1/(1 + e^{-z})$.

总可以选择足够大的 m , 设置 w_j 以及调节 $T_j - T_{j-}$ 的宽度来达到近似的精度, 其中 $T_j = \theta_j / U_j$, U_j 表示函数 $f(u_j - \theta_j)$ 的斜率.

参 考 文 献

- 1 Zhao Yi. The decomposition of an operator on product B-spaces and its application. Control Theory and Applications, 1985, 2(1): 1-10
- 2 Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983
- 3 张立明. 人工神经网络的模型及其应用. 上海: 复旦大学出版社, 1993

The Controllability for a Class of Systems under Boundary Control and the Achievable Possibility on Neural Network

Zhang Lihua* Jiang Lifan

Abstract A decomposing method for coupled systems is applied to obtain the quantitative relationship between the states and boundary control for linear distributed parameter systems, where the time-variant law of the control can be approximated by Fourier series. Consequently, the controllable pair region is described explicitly and the controllability problem of the system can be analyzed. Furthermore, the achievable possibility on neural network is discussed.

Keywords boundary control, controllable pair region, neural network

* Ocean University of Zhanjiang, Zhanjiang 524025