

一类非线性偏微分方程的解^{*}

唐孟希

区 智

(中山大学物理学系, 广州 510275)

(香港理工大学)

摘 要 给出了在求解真空中爱因斯坦引力场方程时经常遇到的一类非线性偏微分方程 $u_{xy} + ku_xu_y + h(x)u_y = 0$ 的一般解法和包含任意函数的解, 并对解的一些物理性质进行了讨论.

关键词 引力场方程, 非线性偏微分方程

分类号 O 175. 29, O 412. 1

确证引力波的存在是物理学家们关注的课题. 从 1969年 Weber公布他的引力波天线观测数据以来的 20多年中, 除了脉冲双星 PSR1913+ 16轨道周期变率的观测结果提供了引力波存在的间接证据外^[1], 人类还未能在实验室中直接确证引力波的存在. 引力辐射如果仅有平面波的形式, 则辐射的微弱性和天体引力辐射源在时空分布上的随机性使直接接收来自宇宙的引力波信号变得十分困难. 然而引力场方程的高度非线性预示了孤立子解存在的可能性. 若引力孤立波在物理上确实存在, 探测到引力波的可能性就会大大增加. 在寻求引力场方程的孤立子精确解时, 我们曾多次遇到形如

$$u_{xy} + ku_xu_y + h(x)u_y = 0 \quad (1)$$

的二阶非线性偏微分方程, 其中 k 是不等于零的常数. 本文讨论这类方程的求解问题并对所得到的解的物理性质作简单的讨论.

1 方程的物理背景

在球坐标系 (t, r, θ, h) 中求解真空中的引力场方程^[2]

$$R_{\nu} = 0 \quad (2)$$

其中 R_{ν} 表示四维时空的 Ricci 张量. 由于 Ricci 张量的对称性, 引力场方程 (2) 由 10 个方程组成. 由于 Riemann 曲面上 Bianchi 恒等式的存在使得 (2) 的独立方程数小于 10 个. 由于我们寻求的是沿径向传播的波动解, 我们合理地把时空间隔的平方设为

$$ds^2 = e^{2N(ct-r, \theta, h)} (c^2 dt^2 - dr^2) - e^{2L(\theta, h)} r^2 d\theta^2 - e^{2M(\theta, h)} r^2 \sin^2\theta dh^2 \quad (3)$$

其中 c 为真空中的光速. 在 (2) 式表示的 10 个方程中, 当 $(_, \nu) = (\theta, h)$ 时, 对应的方程为

$$N_{\theta h} + N_{\theta}N_h - N_{\theta}L_h - \cot\theta N_h - M N_h = 0 \quad (4)$$

从 (2) 中其他方程解出 L, M 及 N 的关系, 代入 (4) 中消去 L 及 M , 并且考虑到我们只希望

* 国家自然科学基金 (19375019) 和香港理工大学资助项目

收稿日期: 1996-03-13 唐孟希, 男, 50岁, 副教授

寻求沿径向传播的波动解,因而可以认为函数 N 中含 $(ct-r)$ 的部分和含 (θ, h) 的部分可以分离,即

$$N(ct-r, \theta, h) = U(ct-r) + F(\theta, h) \quad (5)$$

经过繁复的运算,我们将会得到

$$F_{\theta\theta} + 2F_{\theta}F_h = 0 \quad (6)$$

如果在柱坐标 (u, z, d, h) 中求解 (2) 式,去寻求沿 z 轴正方向传播的孤立子解,把时间间隔的平方设为

$$ds^2 = e^{2N(ct-z, d, h)} (c^2 dt^2 - dz^2) - e^{2L(d, h)} dd^2 - e^{2M(d, h)} dh^2 \quad (7)$$

当 $(_, \nu) = (d, h)$ 时,对应的方程为

$$N_{dd} + N_d N_h - N_d L_h - M_d N_d - (1/d) N_h = 0 \quad (8)$$

经过类似于在球坐标系中的繁复运算,我们也会得到

$$F_{dh} + 2F_d F_h = 0 \quad (9)$$

很明显, (9) 是 (1) 式的特殊情况。

2 方程的求解

我们先考虑 (1) 式中 $h(x) \equiv 0$ 这种较简单的情况,容易看出,当 u 中只含 x 只含 y 或仅为常数时,方程 (1) 是成立的。在一般情况下,可作变换

$$u(x, y) = (1/k) \ln |h(x, y)| \quad (10)$$

则有 $u_x = h_x / kh$, $u_y = h_y / kh$ 及 $u_{xy} = (hh_{xy} - h_x h_y) / kh^2$, 方程 $u_{xy} + ku_x u_y = 0$ 就会变成一个二阶线性偏微分方程 $h_{xy} = 0$ 。可以得到

$$h(x, y) = X(x) + Y(y) \quad (11)$$

其中 X 和 Y 是任意的 C^1 类函数。则方程 $u_{xy} + ku_x u_y = 0$ 的解为

$$u(x, y) = (1/k) \ln |X(x) + Y(y)| \quad (12)$$

对于 $h(x) \neq 0$ 的方程 (1), 我们只需作变换

$$u(x, y) = u(x, y) - (1/k) \int h(x) dx \quad (13)$$

就可以把方程 (1) 变成

$$v_{xy} + kv_x v_y = 0 \quad (14)$$

因而可以写出一般情况下方程 (1) 的解为

$$u(x, y) = (1/k) \ln |X(x) + Y(y)| / \exp \left[- \int h(x) dx \right] \quad (15)$$

解 (11) 无疑是方程 $h_{xy} = 0$ 的全部解,然而由 (10) 所确定的从 u 到 h 的映射不是一一对应的满映射,因此我们还不能断定 (12) 就是非线性方程 $u_{xy} + ku_x u_y = 0$ 的全部解。同样我们也不能断定 (15) 就是非线性方程 (1) 的全部解。

3 关于解的物理性的讨论

作为有物理背景的微分方程的解,一般要求方程的解满足有限、单值和连续的物理条件。由于在解 (15) 中我们仅要求函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 一阶可微,因此我们容易选择合适的函数形式使方程的解在全空间满足有限、单值和连续的物理条件。在球坐标和柱坐标中,角向坐标的单值性体现为函数的周期性,从函数的任意性和这个要求是容易实现的。

作为引力场方程的解,除了以上一般的物理条件外,时空间隔平方 ds^2 对应的度规 g_{ν}

$$ds^2 = g_{\nu} dx^{\nu} dx^{\nu}$$

还应该满足渐近平直性,即当各时空坐标趋于无穷时应有

$$\lim g_{\nu} = g_{\nu}^{(0)}$$

其中 $g_{\nu}^{(0)}$ 是引力场不存在时的度规,即 Minkovskii 度规. 对于在柱坐标中沿 z 轴正方向传播的波动解,我们仅需考虑 $d \rightarrow \infty$ 的渐近行为. 在柱坐标解 $F(d, h) = (1/k) \ln |R(d) + H(h)|$ 中,进一步的研究表明,除了 $H=0$ 的选择外,对 $H(h)$ 的任何其他选择都会导致 $d \rightarrow \infty$ 渐近平直性质受到破坏.

至于在球坐标下的解,由于 r 包含在传播因子 $(ct-r)$ 内,而 θ 和 h 的周期性又容易得到满足. 我们得到的解将更符合物理意义.

感谢肖子良教授的有益建议.

参 考 文 献

- 1 Weisberg J M, Taylor J H. Obserwations of post-newtonian timing effects in the binary pulsar PSR1913+ 16. Phys Rev Lett, 1984, 52: 1348
- 2 Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Fields. London: Pergamon Press. 中译本,北京:人民教育出版社,1959,332

Some Solutions to a Kind of Nonlinear PDE

Tang Mengxi^{} Au Chi*

Abstract A general solving method and some solutions with arbitrary functions to a kind of nonlinear partial differential equations $u_{xy} + kuw + h(x)u = 0$, presented frequently when the Einstein gravitational field equations in the vacuum are being solved, are found. Some their physical properties are discussed.

Keywords gravitational field equation, nonlinear PDE

^{*} Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275