

# 临界增长 P-Laplace 方程混合边值问题的多解性\*

张桂宜

(中山大学数学系, 广州 510275)

**摘要** 利用临界点理论及集中紧性原理给出拟线性椭圆型方程在一类混合边值条件下的多解性结果.

**关键词** 拟线性椭圆型方程, 临界增长, 混合边值问题

**分类号** O 175. 25

设  $K \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) 为一有界连通开集, 其边界  $\partial K$  是 Lipschitz 连续的且为两部分  $\Gamma_0$  和  $\Gamma_1$  之并, 即  $\Gamma_0$  是  $\partial K$  的某一固定部分,  $\Gamma_1 = \partial K \setminus \Gamma_0$ . 我们还假设  $\Gamma_0$  具有正的  $(N-1)$  维 Hausdorff 测度. 以  $Q(\Gamma_1, K)$  表示  $K$  相对于  $\Gamma_1$  的等周常数, 其定义可见文献 [1]. 记  $X_N$  为具有上述性质且其相应的等周常数  $Q(\Gamma_1, K) = (N \omega_N)^{-1}$  的集合  $K$  所组成的集类, 其中  $\omega_N$  为单位扇形  $\sum (\mathbb{T}, 1)$  的测度, 扇形的定义见下文. 集类  $X_N$  中的元素的典型例子是如下的扇形:

设  $(d, \theta_1, \dots, \theta_{N-1})$  是  $\mathbb{R}^N$  中的极坐标系, 则半径为  $R$ , 幅角为  $\mathbb{T}$  的扇形定义为<sup>[1]</sup>:

$$\sum (\mathbb{T}, R) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \varrho \leq |x| < R, \theta \in (0, c), \varrho \leq \varrho \leq N-2, \theta_N \in (0, \mathbb{T}), \varrho \leq \varrho \leq 2c\}.$$

由文 [1] 中的命题 1.1 知, 当  $\mathbb{T} \in (0, c)$  时  $\sum (\mathbb{T}, R) \in X_N$ . 现记  $V^p(K) = \{u \in W^{1,p}(K) \mid u|_{\Gamma_0} \equiv 0\}$ ,  $S^p(K) = \inf_{u \in V^p(K), u \neq 0} \frac{\|Du\|_p}{\|u\|_{p^*}}$ ,  $S^p(\mathbb{T}_N) = \min_{K \in X_N} S^p(K)$ .

其中  $1 < p < N$ ,  $p^* = Np/(N-p)$ ,  $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L^q(K)}$ .

根据文 [1] 中的定理 2.1 及引理 2.1 知, 对于每一个  $K \in X_N$  及  $\mathbb{T}_N \in (0, C_N/2)$ , 有  $S^p(\mathbb{T}_N) \leq S^p(K) \leq S^p(C_N/2)$ , 并且对  $K = \sum (\mathbb{T}, R)$ ,  $S^p(\mathbb{T}_N)$  是可达的. 这里  $C_N$  为  $\mathbb{R}^N$  中单位球的测度.

在以后的论述中均假定  $K \in X_N$ .

本文讨论如下拟线性椭圆型方程

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (|Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}) = \lambda |u|^{p^*-2} u + f(x, u) \quad x \in K \tag{1}$$

在边界条件

$$\begin{cases} u = 0 & x \in \Gamma_0 \\ -|Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} = a(x) |u|^{p-2} & x \in \Gamma_1 \end{cases} \tag{2}$$

下的多解性. 其中  $1 < p < N$ ,  $p^* = Np/(N-p)$ ,  $\lambda$  为正参数,  $\lambda |u|^{p^*-2} u$  为临界增长项,  $\partial u / \partial n$  为外法向导数.

\* 收稿日期: 1995-12-12 张桂宜, 男, 35 岁, 博士

假定  $a(x) \in C^1(K)$ , 且  $\exists T_0 > 0$  使得  $T(x) \geq T_0 > 0$ . 并设  $f_1: f(x, u) \in C(K \times R^1)$ ,  $f(x, 0) = 0, f(x, u)$  关于变量  $u$  是奇的;  $f_2: \lim_{u \rightarrow \infty} f(x, u) / |u|^{p^*} = +\infty$ , 关于  $x$  一致;  $f_3: \lim_{u \rightarrow 0} f(x, u) / |u|^{p-2} u = 0$ , 关于  $x$  一致;  $f_4: \lim_{u \rightarrow \infty} f(x, u) / |u|^{p^*-2} u = 0$ , 关于  $x$  一致;  $f_5: \forall x \in K$  及  $\forall u$ ,  $\frac{1}{p} u f(x, u) - F(x, u) \geq 0$ , 其中  $F(x, u) = \int_0^u f(x, t) dt$ .

### 1 若干引理

定义  $V^p(K)$  上的范数为  $\| \cdot \|_{V^p(K)} = \| \cdot \|_{W^{1,p}(K)}$ , 可证明  $V^p(K)$  以范数  $\| \cdot \|_{V^p(K)}$  成为一 Banach 空间, 在  $V^p(K)$  上定义泛函

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_K |Du|^p dx - \frac{\lambda}{p^*} \int_K |u|^{p^*} dx - \int_K F(x, u) dx + \frac{1}{p} \int_{\Gamma_1} a(x) |u|^p ds$$

用通常的方法不难证明  $I(u) \in C^1(V^p(K), R^1)$ , 由临界点理论知问题 (1), (2) 之广义解对应泛函  $I(u)$  在  $V^p(K)$  上的临界点.

设  $E$  为 Banach 空间,  $B = \{u | u \in E, \|u\| \leq 1\}$ ,  $I$  是  $E$  上的  $C^1$  泛函,  $\gamma$  是定义在  $E$  中紧的关于原点对称的集上的亏格, 记:

$$\begin{aligned} K_b &= \{u \in E | I(u) = b, I'(u) = 0\} \\ P^* &= \{K \subset C(E, E) | h(0) = 0, h \text{ 是奇同胚且 } h(B) \subset \{u | u \in E, I(u) \geq 0\}\} \\ P_m &= \{K \subset E | K \text{ 紧, 原点对称, } K \in P^*, \forall (K \cap h(\partial B)) \geq m\}. \end{aligned}$$

引理 1 (对偶变分原理) 设  $E$  为 Banach 空间,  $I \in C^1(E, R^1)$  满足  $I: I(0) = 0, I(-u) = I(u); I_2: \exists \delta > 0, T > 0$  使得  $I$  在  $B_\delta \setminus \{0\}$  上大于零而且  $I|_{B_\delta} \geq T > 0$ , 其中  $B_\delta = \{u | u \in E, \|u\| \leq \delta\}$ ;  $I_3: \text{对任意有限维的子空间 } E \subset E, I|_{E \cap \{u \in E | I(u) \geq 0\}}$  是有界的;  $I_4: I$  在  $0 < C < M$  上满足  $(PS)_c$  条件.

记  $b_m = \inf_{K \in P_m} \max_K I(u)$ , 其中  $m$  为自然数. 那么有 ①  $0 < b_m \leq b_{m+1}$ ; ② 如果  $b_m < M$ , 则  $b_m$  是  $I$  的临界值; ③ 如果  $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_{m+l} = b < M$ , 则  $V(K_b) \geq l$ .

证明 此引理为文 [2] 中 Theorem 2.8 的变形, 我们只须将 Theorem 2.8 中的  $(PS)$  条件换成  $(PS)_c$  条件, 然后完全按照文 [2] 中的证明即得本引理.

引理 2 存在与  $\lambda$  无关的  $A_m, m = 1, 2, \dots$ , 使得对所有的  $\lambda > 0$ , 有

$$b_m^\lambda < A_m, \text{ 其中 } b_m^\lambda = \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} I(u).$$

证明 在  $P_m$  的定义中取  $E = V^p(K)$ , 由  $I(u)$  的定义有

$$\begin{aligned} b_m^\lambda &= \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} \left\{ \frac{1}{p} \int_K |Du|^p dx - \frac{\lambda}{p^*} \int_K |u|^{p^*} dx - \int_K F(x, u) dx + \frac{1}{p} \int_{\Gamma_1} a(x) |u|^p ds \right\} \\ &= \inf_{K \in P_m} \max_{u \in K} \left\{ C' \|u\|_{V^p(K)}^p - \int_K F(x, u) dx \right\}, (C' > 0) \end{aligned}$$

由  $(f_2)$  知  $\lim_{u \rightarrow \infty} F(x, u) = +\infty$ , 又因  $K$  为  $V^p(K)$  中的紧集, 故必存在  $M_K > 0$  使得对任意的  $u \in K$ , 都有  $\|u\|_{V^p} \leq M_K$ . 由此可知必存在  $A_m$  (与  $\lambda$  无关) 使得  $b_m^\lambda \leq A_m - 1 < +\infty$ .

### 2 $(PS)_c$ 条件

定理 1 若  $f(x, u)$  满足  $(f_1) \sim (f_5)$ , 那么对于  $0 < C < (S^p(K))^N / N \lambda^{(N/p-1)}$ , 泛函  $I(u)$  满

足 (PS)<sub>c</sub> 条件.

证明 设对于  $0 < C < (S^p(K))^N / N\lambda^{(N/p-1)}$  (3)

有数列  $\{u_n\} \subset V^p(K)$ , 满足  $\|u_n\|_n \rightarrow C, I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ , 在  $(V^p(K))^*$  中, 即有 (当  $n \rightarrow \infty$  时)

$$\frac{1}{p} \int_K |Du_n|^p dx - \frac{\lambda}{p} \int_{\Gamma_1} |u_n|^{p^*} dx - \int_K F(x, u_n) dx + \frac{1}{p} \int_{\Gamma_1} a(x) |u_n|^p ds = C + o(1) \quad (4)$$

$$\sum_{K_i=1}^N \int_K |Du_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx - \lambda \int_K |u_n|^{p^*-2} u_n h dx - \int_K f(x, u_n) h dx + \int_{\Gamma_1} a(x) |u_n|^{p-2} u_n h ds = o(1) \|h\|_{V^p(K)}, \forall h \in V^p(K) \quad (5)$$

在 (5) 式中取  $h = u_n$ , 然后乘以  $1/p$  再与 (4) 式相减并利用  $(f_1)$  的假定得

$$\frac{\lambda}{N} \int_K |u_n|^{p^*} dx \leq C - o(1) \|u_n\|_{V^p(K)}^p \quad (6)$$

由假定  $(f_3, f_4)$  知:  $\forall \delta > 0, \exists C(\delta) > 0$  使得  $|F(x, u_n)| \leq \delta |u_n|^p + C(\delta) |u_n|^{p^*}$ , 结合 (4), (6) 及上式得

$$\frac{1}{p} \left( \int_K |Du_n|^p dx + \int_{\Gamma_1} a(x) |u_n|^p ds \right) \leq C + o(1) + o(1) \|u_n\|_{V^p(K)}^p + \int_K |u_n|^p dx$$

取  $\delta$  充分小, 由上式可知  $\|u_n\|_{V^p(K)}$  有界. 于是存在  $\{u_n\}$  的子列 (仍记为  $\{u_n\}$ ) 及  $u \in V^p(K)$  使  $\left. \begin{aligned} u_n \rightharpoonup_n u \text{ 在 } V^p(K) \text{ 中弱收敛} \\ u_n \rightarrow_n u \text{ 在 } L^p(K) \text{ 及 } L^p(\mathcal{K}) \text{ 中强收敛} \\ u_n \rightarrow_n u \text{ a. e. } \mathcal{K} \end{aligned} \right\} \quad (7)$

由 (6) 知  $\{u_n\}$  在  $L^{p^*}(K)$  中有界, 因此

$$\left. \begin{aligned} |u_n|^{p^*-2} u_n \rightharpoonup_n |u|^{p^*-2} u \text{ 在 } (L^{p^*}(K))^* \text{ 中弱收敛} \\ f(x, u_n) \rightharpoonup_n f(x, u) \text{ 在 } (L^{p^*}(K))^* \text{ 中弱收敛} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中  $(L^{p^*}(K))^*$  为  $L^{p^*}(K)$  的对偶空间.

不失一般性可假设存在  $K$  上的两个有界测度  $\mu$  和  $\tilde{\mu}$ , 在测度意义下使得<sup>[3]</sup>

$$|u_n|^{p^*} \rightarrow \mu, |Du_n|^p \rightarrow \tilde{\mu} \quad (9)$$

由文 [1] 中的引理 2 知存在一可数指标集  $J$ , 互异点集  $\{x_j\}_{j \in J} \subset K$  以及实数集  $\{\alpha_j > 0, j \in J\}$  使得

$$\left\{ \begin{aligned} \mu &= |u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \alpha_j W_j \\ \tilde{\mu} &\geq |Du|^p + \sum_{j \in J} (S^p(K))^{p-p^*} \alpha_j W_j \end{aligned} \right. \quad (10)$$

其中  $W_j$  为  $x_j$  处的 Dirac 测度.

作截断函数  $Z(x) \in \mathcal{D}(R^N)$  满足  $0 \leq Z(x) \leq 1$ , 而且当  $|x| < 1/2$  时,  $Z(x) \equiv 1$ , 当  $|x| \geq 1$  时,  $Z(x) \equiv 0$ . 再记  $Z_\alpha = Z(\frac{\cdot}{\alpha}), \alpha > 0, Z \in R^N$ . 类似于文 [4] 有

$$\int_K |u(x)DZ(x-x_j)|^p dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |DZ|^{pp^*} dx \right)^{(p^*-p)/p^*} \cdot \left( \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} \quad (11)$$

其中  $B(x_j, X) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_j| \leq X\}$ .

现在考虑  $\{Z(x-x_j)u_n(x)\}$ , 其中  $x_j$  固定. 不难证明  $Z(x-x_j)u_n(x) \in V^p(K)$ .

应用 Strauss 引理<sup>[5]</sup>可得

$$\int_K Z(x-x_j)u_n f(x, u_n) dx \rightarrow_n \int_K Z(x-x_j)u f(x, u) dx \quad (12)$$

利用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_K |Du_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial Z(x-x_j)}{\partial x_j} dx \leq \\ & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_K |Du_n|^p dx + C(X) \int_K |u DZ(x-x_j)|^p dx \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $X$  为任意正数,  $C(X) > 0$ .

在 (5) 式中取  $h = Z(x-x_j)u_n$ , 结合 (7), (11)~(13) 得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K Z(x-x_j) |Du_n|^p dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \int_K Z(x-x_j) |u_n|^{p^*} dx + \int_K Z(x-x_j) u f(x, u) dx - \\ & \int_{\Gamma_1} a(x) Z(x-x_j) |u|^p dx + C_1 \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx \end{aligned}$$

其中,  $C_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_K |Du_n|^p dx$ ,  $C_2 = C(X) \left( \int_{\mathbb{R}^N} |DZ|^{pp^*} dx \right)^{(p^*-p)/p^*}$ . 由 (9), 从上式得

$$\begin{aligned} & \int_K Z(x-x_j) dx \leq \lambda \int_K Z(x-x_j) dx + \int_K Z(x-x_j) u f(x, u) dx - \\ & \int_{\Gamma_1} a(x) Z(x-x_j) |u|^p dx + C_2 \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx \end{aligned}$$

由  $Z$  的定义以及 (10), 当  $X$  充分小时有

$$\begin{aligned} & \int_{K \cap B(x_j, X)} |Du|^p dx + \sum_{k \in J} (S^p(K))^{p^*} \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx \leq \lambda \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx + \\ & \sum_{k \in J} \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx + \int_{K \cap B(x_j, X)} u f(x, u) dx - \int_{\Gamma_1 \cap B(x_j, X)} a(x) |u|^p dx + \\ & X C_1 + C_2 \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx \end{aligned}$$

在上式中令  $X \rightarrow 0$  得

$(S^p(K))^{p^*} \leq \lambda$ , 再令  $X \rightarrow 0$  得

$$(S^p(K))^{p^*} \leq \lambda \quad \text{即} \quad \lambda \geq (S^p(K))^N \lambda^{N/p^*} \quad (14)$$

从  $\{|Du_n|\}$  在  $L^p(K)$  中有界知  $\{|Du_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\}$  在  $(L^p(K))^*$  中有界, 不失一般性可设存在

$T \in (L^p(K))^*$  使得  $|Du_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \rightarrow T_i$  在  $(L^p(K))^*$  中弱收敛. 在 (5) 式中令  $n \rightarrow \infty$  得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N T_i \frac{\partial h}{\partial x_i} dx - \lambda \int_K |u|^{p^*-2} u dx - \int_K f(x, u) dx + \int_{\Gamma_1} a(x) |u|^{p-2} u dx = 0 \\ & \forall h \in V^p(K) \end{aligned} \quad (15)$$

经过若干推导可得  $\int_K dx = \sum_{k=1}^N T_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \sum_{j \in J} \int_{K \cap B(x_j, X)} |u|^{p^*} dx$  (16)

类似于 (12) 可得  $\int_K F(x, u_n) dx \rightarrow \int_K F(x, u) dx$ . 在 (4) 式中令  $n \rightarrow \infty$ , 并由 (9) 和 (10) 得

$$C = \frac{1}{p} \int_K |u|^{p-2} dx - \frac{\lambda}{p^*} \int_K |u|^{p^*-2} dx - \sum_{j \in J} \int_{\Gamma_j} F(x, u) dx + \frac{1}{p} \int_{\Gamma_1} a(x) |u|^p ds \quad (17)$$

在 (15) 中取  $h = u$  得

$$\sum_{i=1}^N T_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \lambda \int_K |u|^{p^*-2} dx - \int_K f(x, u) u dx + \int_{\Gamma_1} a(x) |u|^p ds = 0 \quad (18)$$

(17) - (18) / p, 结合 (16) 及假设 (f5) 得

$$\geq \frac{\lambda}{N} \sum_{j \in J} \int_{\Gamma_j} |u|^{p^*-2} dx + \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_K |u|^{p^*-2} dx$$

于是由 (14) 得:  $\geq (S^p(K))^N / N \lambda^{(N/p-1)} |J| + \frac{\lambda}{N} \int_K |u|^{p^*-2} dx$ , 其中 |J| 为 J 的计数.

由 (3) 可推知 |J| = 0, 即 J 为空集. 于是由 (10) 得  $\int_K |u|^{p^*-2} dx = 0$ . 从而由 (9) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |u_n|^{p^*-2} dx = \int_K |u|^{p^*-2} dx \quad (19)$$

记  $P_n(x) = \sum_{i=1}^N (|Du_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}) (\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i})$ , 那么

$$P_n(x) dx = \int_K \{ |Du_n|^p - \sum_{i=1}^N |Du_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + |Du|^p - \sum_{i=1}^N |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \} dx$$

在 (5) 式中分别取  $h = u_n$  和  $h = u$ , 由上式得

$$P_n(x) dx = \int_K (\lambda |u_n|^{p^*-2} + f(x, u_n)) dx - \int_K (\lambda |u|^{p^*-2} u_n + f(x, u_n) u) dx - \int_{\Gamma_1} a(x) |u_n|^p ds + \int_{\Gamma_1} a(x) |u|^{p-2} u_n u ds + o(1) \|u_n\|_{V^p(K)} + o(1) \|u\|_{V^p(K)} + \int_K (|Du|^p - \sum_{i=1}^N |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}) dx$$

由 (7), (8), (9) 以及 (19) 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K P_n(x) dx = 0$ , 再由椭圆性条件可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K \lambda_0 |D(u_n - u)|^p dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K P_n(x) dx = 0, \text{ 其中 } \lambda_0 \text{ 为椭圆性常数. 结合 (7) 即知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{V^p(K)} = 0. \text{ 定理 1 证毕.}$$

### 3 多解性结果

定理 2 设  $f(x, u)$  满足假设 (f1~ f5), 则存在一列正数  $\{\xi_k\}: \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_k > \xi_{k+1} > \dots$ , 使得当  $\lambda \in (\xi_k, \xi_{k+1})$  时, 问题 (1), (2) 至少存在 k 对非平凡广义解.

证明 在引理 1 中取  $E = V^p(K), I = I_k$ , 由以上对  $f(x, u)$  的假设不难验证  $I_k(u)$  满足引理 1 之 (I1~ I3).

选取  $\xi_k > 0$  使得  $\xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_k > \xi_{k+1} > \dots$  而且  $A_{k+1} \leq [S^p(K)]^N / N \xi_k^{(N/p-1)}$ , 其中  $A_k$  为引理 2 中的常数. 那么当  $\lambda \in (\xi_k, \xi_{k+1})$  时有

$$0 < b_1^{\lambda} \leq b_2^{\lambda} \leq \dots \leq b_k^{\lambda} < A_k \leq [S^p(K)]^N / N \xi_{k+1}^{(N/p-1)} < [S^p(K)]^N / N \lambda^{(N/p-1)}$$

由定理 1 知  $I_\lambda(u)$  在  $0 < C < [S^p(K)]^N / N\lambda$  上满足  $(PS)_c$  条件, 亦即  $I_\lambda$  满足引理 1 之  $I_4$  (此时取  $M = [S^p(K)]^N / N\lambda$ ). 从而由引理 1 可知  $I_\lambda(u)$  至少存在  $k$  对非平凡临界点. 定理证毕.

例 取  $K = \sum (c, R)$ , 由定义知  $\sum (c, R)$  为中心在原点, 半径为  $R$  的半球, 记  $\Gamma_0 = \{x \in \sum (c, R) \mid |x| = R\}$ ,  $\Gamma_1 = \sum (c, R) \setminus \Gamma_0$ , 则由文 [1] 知  $K = \sum (c, R) \in X_{N/2}$ .

当  $p = 2$  时, 问题 (1), (2) 是互补边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p^*-2} u + f(x, u) & x \in K \\ u|_K \in M, \left[ \frac{\partial u}{\partial n} + a(x)u \right] |_{\bar{K}} \in M^\perp \end{cases}$$

的特例, 即当  $M = \{u \in H^{1/2}(K) \mid u|_{\Gamma_0} \equiv 0\}$  时的情形. 由以上讨论知如下问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p^*-2} u + f(x, u) & x \in K \\ u|_{\Gamma_0} = 0, \left[ \frac{\partial u}{\partial n} + a(x)u \right] |_{\Gamma_1} = 0 \end{cases}$$

存在多重解.

### 参 考 文 献

- 1 Lions P L, Pacella F, Tricarico M. Best constants in sobolev inequalities for function vanishing on some part of the boundary and related question. Indiana Univer Math J, 1988, 37(2): 301~ 324
- 2 Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual variational methods in critical point theory and application. J Funct Anal, 1973, 14 347~ 381
- 3 Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case, Part I. Revista Math Iberoamer, 1985, 1 145~ 201
- 4 朱熹平. 临界增长拟线性椭圆型方程的非平凡解. 中国科学. 1988, A3 225~ 237
- 5 Strauss W. Existence of solitary waves in higher dimensions. Comm Math Phys, 1977, 55: 149~ 162

## Multiple Solutions of P-Laplace Equations Involving Critical Sobolev Exponents for Mixed Boundary Value Problem

Zhang Guiyi\*

**Abstract** The critical point theory and the concentration-compactness principle are used to prove the multiplicity of solutions of the quasilinear elliptic equation.

**Keywords** quasilinear elliptic equation, critical growth, mixed boundary value problem

\* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275