

# 有限深层化海洋中的压力脉动点源函数<sup>\*</sup>

方 颖 吴建华

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

**摘 要** 利用积分变换和本征函数展开法, 导出了层化海洋中有限深情形下二维和三维压力脉动源函数的一个更易于分析和数值计算的双线性级数表达式. 对二层海情形, 源点越接近密跃层, 内辐射波越大; 若低频或海水显著分层, 即使源点离密跃层较远, 内辐射波也有可能是显著的, 且其振幅可大于自由表面辐射波振幅; 低频时在仅对内波感兴趣的情形, 在自由面上作刚性壁假定是合适的.

**关键词** 分层流, 波浪绕射和散射, 内波, 海洋工程, 边界元方法

**分类号** O 353. 2

在船舶与海洋工程中, 发展一种有效实用的数值模拟方法, 以预报离岸结构在波浪中的受力和运动, 一直是人们关注的课题. 在均匀海情形, 人们已提出了多种有效的计算方法来处理线性波浪绕射和散射问题, 其中, 边界元方法是目前使用得最广泛的方法之一<sup>[1]</sup>.

近年来, 人们亦开始对层化海洋中离岸结构的水动力特性及其所受波浪荷载的问题感兴趣<sup>[2, 3]</sup>, 并提出了分析线性问题的谱方法<sup>[4]</sup>、边界元方法<sup>[5]</sup>和多极展开法<sup>[6]</sup>等, 得到了一些新的结果. 但是尚未见到采用边界元方法分析分层海中波浪绕射和散射问题的算例, 其原因可能与目前尚未得到易于数值计算的格林函数有关.

作为边界元方法应用的基础, 本文给出了层化海洋中有限深情形下的二维和三维压力脉动点源函数的双线性级数表达式, 分析了二层海情形内辐射波振幅随源点位置、海水密度、脉动频率和水深等的变化特性.

## 1 脉动点源函数双线性展开

取绝对坐标系  $O-xyz$ ,  $z$  轴以指向地心的方向为其负向,  $z = -H$  为海底表面,  $z = 0$  为平均自由面,  $K$  为平均自由面与海底表面所界之流域. 假定海水是无粘的理想流体, 海水连续分层, 其平均密度  $\bar{\rho}$  仅沿垂向变化. 记  $k$  为脉动频率,  $g$  为重力加速度,  $p_0$  为压力点源坐标,  $p$  为场点坐标,  $N$  为 Brunt-Valsala 频率,  $N^2(z) = -g\bar{\rho}'(z)/\bar{\rho}(z)$ . 一般仅在密跃层附近密度变化才显著, 因此可令  $N(0) = 0$ , 这样, 二维单位压力脉动点源函数  $G$  的提法为<sup>[5]</sup>

$$L\Delta G + G = -4\pi W(p - p_0) \quad p, p_0 \in K \quad (1)$$

\* 广东省自然科学基金 (960028) 和中山大学高等学术研究中心基金会 (香港) 资助项目

收稿日期: 1996-06-26 方颖, 女, 30 岁 讲师

$$L_F G = 0, z = 0; L_H G = 0, z = -H; L_R G > 0, x \rightarrow \pm \infty \quad (2)$$

其中,  $p_0 = (x_0, z_0)$ ,  $p = (x, z)$ ,  $L = \partial L_H [\partial^{-1} (1 - \epsilon)^{-1} L_H]$ ,  $L_F = L_H - \nu$ ,  $L_H = \partial / \partial z$ ,  $\Delta_1 = \partial^2 / \partial x^2$ ,  $L_R = \partial / \partial x + ik$ , 而  $\nu = k^2 / g$ ,  $\epsilon(z) = N^2(z) / k^2$ ,  $k$  为辐射波波数.

关于  $(x - x_0)$  对定解问题式 (1) 至式 (2) 取 Fourier 变换, 并记  $\kappa$  为 Fourier 变换参量,  $\tilde{G}$  为  $G$  的 Fourier 变换函数, 得到

$$L \tilde{G} - \lambda \tilde{G} = -4W(z - z_0) \quad z, z_0 \in (-H, 0) \quad (3)$$

$$L_F \tilde{G} = 0, z = 0, \quad L_H \tilde{G} = 0, z = -H \quad (4)$$

这里,  $\lambda = \kappa^2$ . 我们知道<sup>[5]</sup>, 方程 (3) 的齐次方程和边界条件式 (4) 构成一本征值问题, 存在离散本征值序列  $\{\lambda_n\}$  和其相应的在区间  $(-H, 0)$  上关于权函数  $1/\epsilon(z)$  正交的归一化本征函数  $\{V(\lambda_n, z)\}$ , 因此可将  $\tilde{G}$  按完备的归一化正交函数  $V(\lambda_n, z)$  展开, 即

$$\tilde{G} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z_0) V(\lambda_n, z) \quad z, z_0 \in (-H, 0) \quad (5)$$

将其代入式 (3), 对所得方程两边乘以函数  $V(\lambda_m, z) / \epsilon(z)$ , 再在区间  $[-H, 0]$  上对其积分, 并注意到  $V(\lambda_n, z)$  在区间  $(-H, 0)$  上关于权函数  $1/\epsilon(z)$  正交的性质, 求得

$$G_n(z_0) = 4V(\lambda_n, z_0) / (\lambda - \lambda_n) \quad (6)$$

于是由 Fourier 逆变换, 可得二维压力脉动点源函数

$$G(p, p_0) = \sum_{n=1}^{\infty} V(\lambda_n, z_0) V(\lambda_n, z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 - \lambda_n} \exp[i\kappa(x - x_0)] d\kappa \quad (7)$$

设序列  $\{\lambda_n\}$  中仅存在  $M$  个有限正实本征值

$\lambda_n$ ,  $\lambda_n = k_n^2 > 0 (n = 1, 2, \dots, M)$ ,  $k_n$  为表面辐射波波数或内辐射波波数,  $k_1 < k_2 < \dots < k_M$ , 另存

在无限多个负实本征值  $\lambda_n (n \geq M+1)$ ,  $-\lambda_{M+s} = -s > 0$ ,  $-s < -s-1 (s = 1, 2, \dots)$ , 为非传播模式. 这样, 可以看出, 在式 (7) 中存在零点  $k_n$  和  $-k_n (n = 1, \dots, M)$ , 积分式 (7) 是不定的, 这种不定性应由辐射条件来消除. 因式 (7) 中的被积函数在半径为无穷大的半圆周上的积分为零, 故式 (7) 可变为围道积分. 为满足辐射条件, 取由图 1

所示积分围道. 对  $x > x_0$  的情形, 可在复平面  $\kappa$  的上半平面引进半圆, 组成一个封闭围道. 当

$\text{Im} \kappa \rightarrow \infty$  时, 被积函数趋于零. 据 Jordan 引理,

沿半径为无穷大的半圆的线积分为零; 类似地, 当  $x < x_0$  时, 我们在下半平面引入半圆, 组成一封闭围道. 于是, 由留数定理, 可得二维脉动点源函数  $G(p, p_0)$  的双线性展开式:

$$G(p, p_0) = 2\pi \sum_{n=1}^M \frac{V(k_n^2, z_0) V(k_n^2, z)}{k_n} \exp(ik_n |x - x_0|) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(-\frac{s}{n}, z_0) V(-\frac{s}{n}, z)}{-n} \exp(-|x - x_0|) \quad (8)$$

上式表明函数  $G$  具有对称性, 即  $G(p, p_0) = G(p_0, p)$ .

对三维问题,  $p = (x, y, z)$ ,  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $L_R = \frac{\partial}{\partial r} (\frac{\partial}{\partial r} - ik)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , 压力脉动源函数  $G$  所需满足的辐射条件是  $L_R G > 0, r \rightarrow \infty$ . 此时, 用 Hankel 变

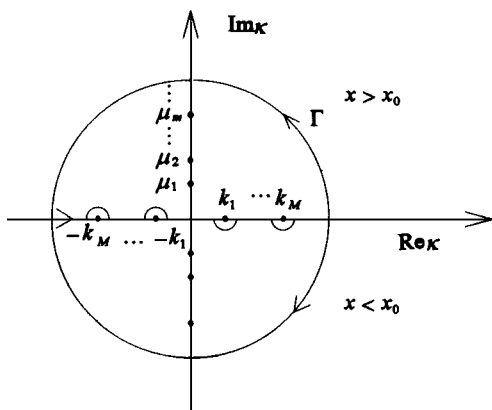


图 1 积分围道图

Fig. 1 Contours of integration

换替代 Fourier变换类似地可得脉动点源函数  $G$  的双线性展开式如下:

$$G = \pi \sum_{n=1}^M V(k_n^2, z_0) V(k_n^2, z) H_0^{(1)}(ik_n R) + \sum_{n=1}^{\infty} V(-k_n^2, z_0) V(-k_n^2, z) K_0(k_n R) \quad (9)$$

式中,  $H_0^{(1)}$  为第一类零阶 Hankel 函数,  $K_0$  为零阶第二类变形 Bessel 函数.

## 2 二层海情形下的本征值和本征函数

一般而言, 求方程 (3) 的齐次方程和边界条件 (4) 所构成之本征值问题的解析解不易, 只宜数值求解. 幸运的是, 对大部分海区, 宜用二层海模式, 此时, 易得其本征值和本征函数.

事实上, 对二层海模式而言, 设海水由密度为  $d$  的上层水体和密度为  $d_1$  的下层水体组成,  $d > d_1$ ,  $z = -h$  为密跃层 (即两层流体的平均分界面),  $0 < h < H$ , 也就是

$$\bar{d}(z) = d_1 - (d - d_1)U(z + h), \quad z \in (-H, 0) \quad (10)$$

其中,  $z \geq 0$  时,  $U(x) = 1$ ,  $x < 0$  时,  $U(x) = 0$ . 这样,  $\bar{d}N^2 = g(d - d_1)W(z + h)$ . 令

$$(d\bar{G}/dz)/\bar{d} = (1 - N^2/k^2)W \quad (11)$$

由文 [5] 可知,  $W$  表示垂向速度的 Fourier 变换函数, 当  $z \neq z_0$  时, 质量守恒要求在密跃层  $z = -h$  处,  $W$  连续, 即

$$f d\bar{G}/dz = d\bar{G}/dz, \quad z = -h \quad (12)$$

其中,  $f = d_1/d$ ,  $\bar{G} = \lim_{z \rightarrow -h \pm 0} G$ . 另一方面, 对式 (11) 在区间  $(-h - X, -h + X)$  上关于变量  $z$  积分, 并使  $X \rightarrow 0$ , 这导致

$$\bar{G} - G = -(f - 1)\nu d\bar{G}/dz, \quad z = -h \quad (13)$$

于是, 在二层海情形下, 本征值  $\lambda_n$  和本征函数  $V(\lambda_n, z)$  由齐次方程

$$d^2\bar{G}/dz^2 - \lambda\bar{G} = 0, \quad z \in \{(-H, -h) \cup (-h, 0)\} \quad (14)$$

自由面与海底条件 (4) 以及两层流体的平均分界面条件 (12), (13) 确定. 易证, 该本征值问题的本征值  $\lambda_n$  满足色散方程:

$$\bar{d}[(1 - T_1 T_2)(kT - \nu) + (f - 1)(\nu^2 - k^2)T_1 T_2] = 0 \quad (15)$$

其中,  $k = \sqrt{\lambda}$ ,  $T = \tanh kH$ ,  $T_2 = \tanh kh$ ,  $T_1 = \tanh k(H - h)$ . 色散方程 (15) 中仅存在二个正实根  $k_1$  和  $k_2$ , 分别表示表面辐射波波数和内辐射波波数, 另存在无穷个正虚根  $i_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ), 表示非传播模式. 而相应的本征函数  $V(\lambda, z)$  可表示为

$$V(k_n^2, z) = f(k_n, z) / \|f\| \quad (16)$$

其中函数  $f$  的定义是

$$f(k, z) = \begin{cases} d \sinh k(H - h) [\nu \sinh kz + k \cosh kz], & z \in (-h, 0) \\ d_1 [\nu \cosh kh - k \sinh kh] \cosh k(z + H), & z \in (-H, -h) \end{cases} \quad (17)$$

$$\|f\| = \int_{-H}^0 1/\bar{d}(z) \cdot f(k, z) f(k, z) dz \quad (18)$$

易知, 当  $X = f - 1 = o(1)$  时, 表面辐射波波数  $k_1$  和内辐射波波数  $k_2$  满足关系式:

$$k_1 \tanh k_1 H = \nu + o(X); \quad k_2 X \nu = 1 / \tanh k_2 (H - h) + 1 / \tanh k_2 h + o(X) \quad (19)$$

## 3 讨 论

若将压力脉动点源函数的双线性级数展开式 (8), (9) 和文 [5] 中的结果比较可见, 所得新表达式比原来的表达式要简洁明晰, 易于分析并利于数值计算. 当退化至等密度海洋情

形,式(8),(9)与 John(1950)给出的解式完全一致<sup>[7]</sup>.

我们知道,若 Brunt-Valasala 频率的最大值  $N_{\max} < k$ ,方程(1)为椭圆型方程,这时,与均匀海情形相似,仅存在表面辐射波.通常 Brunt-Valasala 频率是小的,因此,只有在低频时才需考虑海水层化的影响.当 Brunt-Valasala 频率的最大值  $N_{\max} > k$  时,方程(1)是一个混合型偏微分方程,其类型取决于 Brunt-Valasala 频率与波浪频率的比值  $N(z)/k$ ,此时,由于密跃层的存在,使得扰动波系中不但存在表面辐射波,而且存在内辐射波,与均匀海情形相比较,波浪绕射和散射过程将复杂和丰富得多,扰动能量不但由表面辐射波并由内辐射波传播出去.

在二层海情形,仅存在二个传播模式,一是表面辐射波,波数为  $k_1$ ,二是内辐射波,波数为  $k_2$ .一般情况下,  $d_2$  仅略大于  $d_1$ ,这表明表面辐射波波数  $k_1$  与内辐射波波数  $k_2$  满足近似估计式(19),  $k_2 = O(\nu X^{-1})$ . 利用当地表面波波高  $a$  和二层流体界面波高  $Z$  的表达式<sup>[8]</sup>

$$\nabla_z G/d_1 z = 0, \quad Z = (G - G^*)/(d_2 - d_1) = -\partial G^*/\partial z^* - 1/d_1 \nu, \quad z = -h$$

和本征函数  $V(\lambda, z)$  的表式(16, 17, 18),可知,源点越接近二层流体分界面,内辐射波越大,其在密跃层  $z = -h$  处取最大值;水较浅,分层显著或低频时,内辐射波随  $z_0$  的变化较平缓.换言之,即使源点离两层流体的平均分界面较远,低频时,在显著分层的浅水中,内辐射波振幅亦可取较大的值;而对表面辐射波来说,如同均匀海情形,在自由面  $z = 0$  处最大,源点越接近自由面,表面辐射波越大;在一定的情形下(如源点离二层流体分界面足够近,海水显著分层或低频等),内辐射波振幅可大于自由表面辐射波振幅.

另一方面,当  $kH \gg 1$  时,对表面波传播模式而言,其对二层流体界面辐射波波高  $Z$  的贡献与对自由表面辐射波波高  $Y$  的贡献之比  $T$  为  $\exp(-kh)$ ,这说明,如同均匀海情形,表面波随水深  $h$  而指数衰减;而对内波传播模式,其对二层流体界面波高  $Z$  的贡献与对表面波波高  $Y$  的贡献之比  $U$  为  $-\frac{d_2}{d_2 - d_1} \exp(kh)$ ,也就是说,无任压力脉动点源在水中的什么位置,当  $f - f_c \ll 1$  时,内波传播模式对二层流体界面波高  $Z$  的贡献远大于对表面波波高  $Y$  的贡献,因次,对内波在自由面上作刚性壁假定是合适的.

## 参 考 文 献

- 1 Mei C C. The applied dynamics of ocean surface waves. USA: John Wiley & Sons Inc, 1983. 378~ 383
- 2 Wu Jianhua. The second order wave loads on bodies in stratified ocean. Proc 7th Intl Workshop on Water Waves and Floating Bodies. France: Val de Reuil, 1992. 297~ 301
- 3 Sturova I V. Hydrodynamic forces on a submerged cylinder advacing in waves of two layer fluids. Proc 9th Intl Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Kuju, Japan, 1994. 199~ 203
- 4 吴建华,吴秀恒,李世谟.大尺度物体在层化海洋中的波浪绕射和散射理论(IV).水动力学研究与进展,1991(Ser A), 6(3): 46~ 54
- 5 吴建华,吴秀恒,李世谟.大尺度物体在层化海洋中的波浪绕射和散射理论(III).水动力学研究与进展,1990(Ser A), 5(1): 74~ 80
- 6 Linton C M, McIver M. The interaction of waves with horizontal cylinders in two-layer fluids. J Fluid Mech, 1995, 304(3): 213~ 329
- 7 John F. On the motion of floating bodies II. Comm Pure Appl Math, 1950, 3: 45~ 101
- 8 吴建华,吴秀恒,李世谟.大尺度物体在层化海洋中的波浪绕射和散射理论(I).水动力学研究与进展,1989, 4

(2): 81~ 88

## The Oscillating Pressure Point Source Function in Stratified Ocean of Finite Depth

*Fang Ying<sup>\*</sup>   Wu Jianhua*

**Abstract** By means of integral transformation and eigenfunction expansion, the solutions of two and three dimensional pressure point source function in stratified ocean of finite depth are derived and expressed as bilinear eigenfunction expansions, which are more distinct and easier to be treated in numerical computation than others. For two layer fluids mode, this analysis indicates that, the closer to the interface of the two layer fluids the source point, the larger the internal radiation waves; if the oscillating frequency is low or the stratification is significant, the internal radiation wave may be remarkable, and there also exists a possibility that the amplitude of it is larger than that of the free surface radiation wave, even in the case that the source point is not very close to the interface, in the case of low frequency, if one is only interested in the internal waves, the rigid wall assumption on free surface will be suitable.

**Keywords** stratified flows, wave diffraction and scattering, internal waves, offshore engineering, boundary element method

---

<sup>\*</sup> Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275