

哈密顿不依赖时间的系统的 AA 几何位相^{*}

罗宜平 周义昌

(中山大学物理学系, 广州 510275)

摘 要 讨论哈密顿不依赖于时间的系统的非绝热几何位相, 结果证明: 对于这样的系统, 除了定态是几何位相为零的循环态之外, 循环态条件仅在如下情况满足: ① 两能级系统或只有两个本征态的几率幅不为 0 ② 系统的激发能是可公度的. 如果循环态存在, 系统的非绝热几何位相与初态 $|j(0)\rangle$ 有关.

关键词 非绝热几何位相 (AA 位相), 循环态

分类号 O 412

自从 Berry 引入几何位相的概念之后^[1], 它在各个物理领域的重要性, 已为人们所逐渐认识^[2]. Aharonov 和 Anandan (AA) 把 Berry 的概念推广到非绝热变化的系统^[3], 给出循环态 (cyclic state) 的几何位相和动力学位相的计算公式. 近来, 应用 AA 理论公式计算一些哈密顿与时间无关的具体系统的非绝热几何位相 (AA 位相), 已成为人们关心的课题^[4-7]. 本文将讨论这类系统的几何位相, 希望能提供一般结论, 有助于对上述文献的具体结果的理解.

AA 讨论按薛定格方程 $i\hbar(\partial/\partial t)|j(t)\rangle = H|j(t)\rangle$ 演化的态. 如果经历称为周期的时间 T 之后, 态 $|j(T)\rangle$ 与初态 $|j(0)\rangle$ 只差一个相因子

$$|j(T)\rangle = e^{ir}|j(0)\rangle \quad (1)$$

则相因子 r 可划分为几何相因子和动力学位相因子. 通常称满足条件 (1) 的态 $|j(t)\rangle$ 为循环态. 循环条件 (1) 是 AA 理论的出发点. 正如文献 [8] 指出, Samuel 和 Bhandari 曾将几何位相概念推广到非循环演化态, 但这种推广更多着眼于数学方面和强调 Berry 位相的几何性质. 就我们所知, 还没有人使用这种推广于具体系统的计算. AA 引入与循环演化的态 $|j(t)\rangle$ 相应的辅助的周期函数 $|\tilde{j}(t)\rangle = \exp[-if(t)]|j(t)\rangle$, 它满足周期条件 $|\tilde{j}(T)\rangle = |\tilde{j}(0)\rangle$, AA 使用薛定格方程证明, 总位相 $r = f(T) - f(0) = r_D + r_G$, 认为其中的动力学位相由哈密顿量的平均值决定

$$r_D = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle j(t) | H | j(t) \rangle dt \quad (2)$$

而几何位相

$$r_G = \int_0^T \langle \tilde{j}(t) | i \frac{d}{dt} | \tilde{j}(t) \rangle dt \quad (3)$$

* 广东省高教厅重点学科基金和中山大学高等学术研究中心基金资助项目

收稿日期: 1996-11-12 罗宜平, 男, 35 岁, 讲师, 广东教育学院访问学者

由于 AA 的推广,即使哈密顿不依赖于时间,在一定初条件下,经历一周期 T 之演化,总位相可能不全部是动力学位相^[2,7,8].

1 存在循环态的条件和 AA 位相

下面只讨论哈密顿量不依赖于时间的系统.设哈密顿量的本征方程为 $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, 其中 $|n\rangle$ 是归一化的.系统的状态按本征态 $|n\rangle$ 展开

$$|j(t)\rangle = \sum_n a_n \exp\left[-\frac{iE_n t}{\hbar}\right] |n\rangle \quad (4)$$

展开系数 a_n 为态 $|j(t)\rangle$ 取本征态 $|n\rangle$ 的几率幅,应满足归一条件 $\sum_n |a_n|^2 = 1$.由于 H 不依赖于时间, a_n 与时间无关,仅由初态 $|j(0)\rangle$ 决定,即 $a_n = \langle n | j(0) \rangle$.

当 H 通过参数 R 周期地依赖于时间 t 时,周期 T 由哈密顿的变化周期决定, Berry 讨论正是这种情况.当 H 不依赖于时间,周期 T 的选取,应由保证 (1) 式成立来决定.若存在使 (1) 式成立的 T 值,则表示系统的态 $|j(t)\rangle$ 的演化是循环的,使用 AA 理论公式 (2) (3) 去计算动力学相位和几何相位才有意义.

如果 (4) 式中只有一个本征态 $|k\rangle$ 的几率幅 a_k 不为 0,即 $|j(t)\rangle = \exp\left[-\frac{iE_k t}{\hbar}\right] |k\rangle$ (对应于初态 $|j(0)\rangle = |k\rangle$), 系统处于定态.此时,周期 T 不论如何选取,状态都是循环演化, (1) 式恒成立.文献 [8] 已经证明,定态的几何位相等等于 0,总位相全部是动力学的.

如果 (4) 中的 $|j(t)\rangle$ 只取两个本征态 (例如 $|k\rangle$ 和 $|l\rangle$) 的几率幅不为 0 (或者系统是二能级系统).则系统的态为

$$|j(t)\rangle = a_k \exp\left[-\frac{iE_k t}{\hbar}\right] |k\rangle + a_l \exp\left[-\frac{iE_l t}{\hbar}\right] |l\rangle = \exp\left[-\frac{iE_k t}{\hbar}\right] \left\{ a_k |k\rangle + a_l \exp\left[-\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}\right] |l\rangle \right\}$$

显然,只要取 $T = 2\pi\hbar/(E_l - E_k)$ (这里设 $E_l > E_k$), 则有 $|j(T)\rangle = e^{ir} |j(0)\rangle$, 其中 $r = -2\pi E_k / (E_l - E_k)$. 那么,不论初态 $|j(0)\rangle$ 给出的 a_l 和 a_k 为何值, $|j(t)\rangle$ 总是循环态,应用 AA 公式,容易算得动力学相位

$$r_D = [-2\pi/(E_l - E_k)](|a_k|^2 E_k + |a_l|^2 E_l) \quad (5)$$

几何相位可由总相位 r 减去动力学相位 r_D 得到

$$r_G = 2\pi |a_l|^2 \quad (6)$$

取归一化的周期辅助函数 $|j(t)\rangle = a_k |k\rangle + a_l \exp\left[-\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}\right] |l\rangle$, 使用公式 (3), 亦可得与 (6) 式相同的结果.

当 (4) 式的 $|j(t)\rangle$ 取 3 个本征态 ($|k\rangle$, $|l\rangle$ 和 $|m\rangle$) 的几率幅不为 0 时,系统的态

$$|j(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iE_k t}{\hbar}\right) [a_k |k\rangle + a_l \exp\left(-\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}\right) |l\rangle + a_m \exp\left(-\frac{i(E_m - E_k)t}{\hbar}\right) |m\rangle] \quad (7)$$

上式取循环演化 $|j(T)\rangle = e^{-ir} |j(0)\rangle$ 充要条件是

$$T(E_l - E_k)/\hbar = 2\pi n_1, \quad T(E_m - E_k)/\hbar = 2\pi n_2 \quad (8)$$

(8) 式意味着 $(E_l - E_k)/(E_m - E_k) = n_1/n_2$ 为有理数, 这就是说, 激发能 $(E_l - E_k)$ 与 $(E_m - E_k)$ 是可公度的数. 当这一条件满足时, (6) 式是循环态. 可以参照 (8) 式选取周期 T , 使用 AA 公式计算

r_D 和 r_G , 结果仍然是与初态 $|j(0)\rangle$ 有关.

推广到 (4) 式的 $|j(t)\rangle$ 取更多本征态的几率幅不为 0 的情形. 当且仅当相应的激发能是可公度数, $|j(t)\rangle$ 才是循环态.

综上所述, 对于任一哈密顿量与时间无关的系统, 循环态总是存在的, 但不是任何态都是循环演化的. $|j(t)\rangle$ 是不是循环态, 决定于初条件. 如果是循环态, 其动力学位相及 AA 几何位相的数值亦决定于初条件 $|j(0)\rangle$.

2 实例分析

一维谐振子 $H = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$, 本征方程 $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ 给出 $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, 激发能 $n\hbar\omega$ 与最小激发能 $\hbar\omega$ 是可公度的. 按照上述讨论, 对于任何初条件给出的 $|j(t)\rangle$ 是循环演化的

$$|j(t)\rangle = \exp(-\frac{i\omega t}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-in\omega t) |n\rangle \quad (9)$$

只要取 $T = 2\pi/\omega$ (与物理直观一致), 则有 $|j(t)\rangle = e^{i\pi} |j(0)\rangle$, 容易算得 $r_G = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2$

及 $V_D = -2\pi (\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 + \frac{1}{2})$, 总位相为 $-\pi$. 注意 r_D 和 r_G 之值与初条件 $|j(0)\rangle$ 有关.

介观环中的单电子, 设环中心穿有 AB 磁通 h , 电子能级 $E_n = (\hbar^2/2ma^2)(n + h/h_0)^2$, 其中 a 是环的半径, $h_0 = hc/e$ 为 AB 磁通量子. 电子的状态一般地表示为

$$|j(t)\rangle = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} a_n \exp[-i\hbar(n + \frac{h}{h_0})^2 t / 2ma^2] |n\rangle$$

下面分开两种情况讨论: ① 磁通 h 作一般取值. 这时, 激发能 $\Delta E_n = (\hbar^2/2ma^2)n(n + 2h/h_0)$, 不同 n 的激发能是不可公度的. 按照上述讨论, 如果 $|j(t)\rangle$ 使 3 个以上的本征态 a_n 的几率恒 $a_n \neq 0$, $|j(t)\rangle$ 不是循环态. 当, 并且仅当 2 个本征态 $|n\rangle$ 的几率幅 $a_n \neq 0$, 介观环的电子状态才是循环态, 并且总相、动力学相位、AA 几何相位的数值, 与所取的两个能级、不为 0 的 a_n 的数值都有关, 而这些都决定于初态 $|j(0)\rangle$. ② 磁通 h 取 AB 磁通量子 h_0 的整数倍. 此时 $\Delta E_n = \hbar^2/2ma^2 \times (\text{整数})$, 明显地, 不同 n 的激发能是可公度的. 任意 a_n 给出的 $|j(t)\rangle$ 都是循环态.

皇冠状非均匀磁场下的介观环, 环中的电子还受到非均匀磁场 $\vec{B} = B_0(\sin i \vec{e}_\phi + \cos i \vec{e}_z)$ 的作用 (其中的 i 是固定的倾斜角, $\vec{e}_\phi$ 和 $\vec{e}_z$ 分别是柱坐标的单位矢量). 系统的哈密顿 $H = (1/2ma^2)[P_\phi + (ea/c)A]^2 - rB^0$ 给出电子的本征能级

$$E_{n\tau} = \frac{\hbar^2}{4ma^2} [(n + \frac{h}{h_0})^2 + (n + \frac{h}{h_0})^2] + \tau [(\frac{\hbar^2}{2ma^2}(n + \frac{1}{2} + \frac{h}{h_0})^2 - 2U_0 \cos i) + r^2 U_0^2 \sin^2 i]^{1/2}$$

其中, $\tau = \pm 1$. 显然, 任两个激发能是不可公度的. 态 $|j(t)\rangle$ 只有取两个态 $|n_1\tau\rangle$ 及 $|n_2\tau\rangle$ 的几率幅 $\neq 0$ 时, 才是循环态, 才能谈论系统的 AA 几何位相. 而按照 (4) 式和 (6) 式, 此时的 AA 几何位相数值, 应该决定于初始条件, 不同的初始条件 $|j(0)\rangle$ 给出的数值是不同的. 因此, 不联系初始条件而谈论 AA 几何位相数值是多少, 结果会是错误的.

本文利用简单的量子理论, 结合具体例子, 讨论了哈密顿量不随时间变化的系统状态为循环态的条件, 进而讨论这类系统 AA 非绝热几何位相的数值. 证明循环态存在条件以及总相、AA 几何位相、动力学位相的数值, 均与初条件 $|j(0)\rangle$ 有关.

参 考 文 献

- 1 Berry M V. Quantum phase factors accompanying adiabatic changes. London Proc Roy Soc. 1984, A392-45
- 2 Mead C A. The geometric phase in molecular systems. Rev Mod Phys. 1992, 64-51
- 3 Aharonov A, Anandan J. The geometric phase and dynamic phase in a quantum system. Phys Rev Lett. 1987, 58-1595
- 4 Gao X C, Qian T Z. A-A phase and persistent currents in a mesoscopic ring. Phys Rev. 1993, B47: 7128
- 5 Qian T Z, Su Z B. Spin-orbit interaction and A-A phase in mesoscopic rings, Phys Rev Lett. 1994, 72-2311
- 6 Joshi A, Pati A K, Banerjee A. Geometric phase with photon statistics. Phys Rev. 1994, A49-5131
- 7 Joshi A, Pati A K, Banerjee A. Erratum. Phys Rev. 1995, A51-3390
- 8 Zeng J Y, Lei Y A. Berry phase and nonstationarity of a quantum state. Phys Rev. 1995, A51-4415

AA Geometrical Phase of A System with the Time -Independent Hamiltonian

Luo Yiping^{} Zhou Yichang*

Abstract Non-adiabatic geometrical phase of a system with time-independent Hamiltonian is discussed. The results show that apart from the stationary state, which is the cyclic state without geometrical phase, the condition of cyclic state can be satisfied in the following cases: only two eigenstates have non-zero probability amplitudes in the state, the excitation energies are commensurate. The results also show that the cyclic state, the non-adiabatic geometrical phase and the dynamical phase depend on the initial state.

Keywords non-adiabatic geometrical phase (AA phase), cyclic state

^{*} Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275