

# 地震波走时问题的线性化方法<sup>\*</sup>

阮晓青<sup>1)</sup> 赵 冰<sup>2)</sup> 孙 巍<sup>1)</sup>

( 1)中山大学岭南学院,广州 510275; 2)西安石油学院)

**摘 要** 直接从走时方程出发,给出了走时方程的一种新的线性化方法.该方法具有直观性强,易实现,计算稳定等特点.

**关键词** 走时,反演,B-G方法

**分类号** O 241. 82

研究地球内部的速度分布是地球物理中的一个经典问题,它对于探明地球内部构造是十分有意义的,但也是十分困难的.目前有两类方法,反散射方法<sup>[1,2]</sup>和利用走时资料进行速度反演的方法<sup>[3-5]</sup>.本文给出的方法属于第二类:直接从走时非线性积分方程出发,在与Born近似类似的假设下,给出了走时方程的一种新的线性化方法.在方法的推导中,本文假设速度  $v$  只随深度变化:

$$v(z) = v_0(z) + T(z) \quad (1)$$

其中,  $v_0(z)$  是已知的背景速度,  $T(z)$  是一个小扰动,且

$$|T(z)/v_0(z)| \ll 1 \quad (2)$$

成立,在条件(2)之下,证明了走时差满足下述近似公式

$$t - t^* \approx \int_0^h T / (v_0^2 - p^2 v_0^2) dz \quad (3)$$

进一步导出震中距  $x$  的近似公式

$$x \approx \int_0^h (p v_0 / (1 - p^2 v_0^2)) dz + X \quad (4)$$

其中,  $t$  表示背景波速下的走时理论值,  $t^*$  表示观测走时值,  $X = O(T/v_0^2)$  是一个小调整量,我们利用文[6]中提出的区域收缩进化策略,利用(4)式可以相当精确地确定射线参数  $p$ ,对合成数据的计算表明,本方法直观,易实现,计算结果稳定.

## 1 主要结果的推导

在背景速度已知的情况下,如果速度  $v$  满足

$$v(y) = v_0(y) + T(y), \quad |T/v_0| \ll 1, \quad T(0) = 0 \quad (5)$$

则有下列两个走时方程<sup>[4]</sup>.

\* 国家攀登计划资助项目

收稿日期: 1996-05-08 阮晓青,男,38岁,副教授,现在深圳大学软科学信息系工作

$$t^* = \int_{\Gamma} dS / [v_0 + T(y)] = \int_0^h Z dy + p^* x_0$$

$$t = \int_{\Gamma'} dS / v_0 = \int_0^h Z dy + p x_0$$

$h$  是层厚,  $\Gamma, \Gamma'$  是极值路径,  $p^*$  与  $p$  可以是相同的, 表示水平慢度 (射线参数), 一旦震中距  $x$  确定,  $p$  是常量. 这时

$$t - t^* = \int_0^h (Z - Z^*) dy \approx \int_0^h T / (v_0^2 - 1 - p^2 v_0^2) dy \quad (6)$$

当  $v_0$  已知时,  $t$  是可以求出的<sup>[6]</sup>,  $t^*$  是测量值, 因此 (6) 式左端是已知的. (6) 式是一个线性积分方程, 这样, 原来已知  $t^*$ , 要从

$$t^* = \int_{\Gamma} \frac{ds}{V_s + T(y)} \quad (7)$$

这一非线性问题中反演  $T(y)$  的问题就化成了线性问题 (6), 其中  $p$  由震中距  $x$  确定. 经推导有近似公式

$$x \approx \int_0^h (p v_0 / \sqrt{1 - p^2 v_0^2}) dy \pm X \quad (8)$$

下面研究计算误差. 设  $\bar{t}$  表示按近似式 (6) 求出的理论值, 即

$$t - \bar{t} = \int_0^h (T(y) / v_0^2 - \sqrt{1 - p^2 v_0^2}) dy + O\left(\left[T/v_0\right]^2\right) \quad (9)$$

上述两式相减可得

$$|\bar{t} - t^*| = O\left(\left[T/v_0\right]^2\right) \quad (10)$$

(10) 式表明, 理论值与观测值的残差是  $(T/v_0)^2$  阶的, 因此

$$\int_0^h T dy \leqslant d |t^* - \bar{t}| \quad (11)$$

如果反演获得的近似函数记为  $T_1$ , 则速度的  $L^2$  范数为

$$\|V_0 + T - V_0 - T_1\|_{L_2} = \|T - T_1\|_{L_2} \leqslant C \|t^* - \bar{t}\|^{1/2} \quad (12)$$

上式表示当理论值与实测值的残差趋向 0 时, 走时资料反演  $T$  是稳定的和收敛的.

容易推出

$$x \approx \int_0^h \left( p v_0 / \sqrt{1 - p^2 v_0^2} \right) dy \pm X \quad (13)$$

因此, 能否较精确的求出  $p$  是关键, 取  $T(y) = 0.01 \sin y, p = \pi/10, V_0 = 2.5, h = 58.36$  验证了 (6) 式的近似程度为  $\bar{t} - t^* = 0.000\ 382 \approx 0.454\ 747 \times 10^{-3} = 0.454\ 365 \times 10^{-3}$ .

## 2 Backus-Gilbert 方法

所谓 Backus-Gilbert 方法 ( $B-G$  方法), 就是对每一  $x \in [a, b]$ , 在限制

$$\sum_{j=1}^n v_j k_j(y) dy = 1 \quad (14)$$

之下, 求解下述极小化问题

$$S_x(v^*) = \min S_x(v) \quad (15)$$

$$S_x(v) = \int_a^b |x - y|^2 \left| \sum_{j=1}^n v_j g_j(y) \right|^2 dy \quad v \in R^p \quad (16)$$

定义 极小化下述问题

$$\begin{cases} \min_{x \in [a, b]} S_x(v) = S_x(v^*) \\ \sum_{j=1}^n v_j \int_a^b g_j(y) dy = 1 \end{cases} \quad (17)$$

的解向量  $V(X)$  的分量  $v_j(x)$  称为  $\pi$  阶 Bauckus-Gilbert 基函数, 而  $u_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j v_j(x)$  称为 B-G 解.

根据 Lagrange 乘数法, 给定  $x$  的极小化问题 (17) 等价于下述问题: 求  $V \in R^n, \lambda \in R$  使

$$\begin{cases} G(x) + \lambda V = 0 \\ g^T V = 1 \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $G(x)$  是  $n \times n$  矩阵, 其元素表示为

$$G_{ij}(x) = \int_a^b |x-y|^2 g_i(y) g_j(y) dy \quad i, j = 1, \dots, n \quad (19)$$

$$V_j = \int_a^b g_j(y) dy \quad j = 1, \dots, n \quad (20)$$

(18) 式对给定的  $x$  是一个有  $n+1$  个未知量,  $n+1$  个方程的线性方程组, 如果  $\{g_i(y)\}$  线性无关, 那么, 矩阵  $\begin{bmatrix} G(x) & V \\ V^T & 0 \end{bmatrix}$  可逆, 因此 (18) 有唯一解, 解向量  $(g, \lambda)$  依赖于  $x$  而变. 文 [7] 给出了 B-G 解  $u_n(x)$  逼近真解  $T$  的误差估计为:

当  $T$  是 Lipschitz 连续, 且 Lipschitz 常数为  $l > 0, k=1$  时,  $|T(x) - u_n(x)| \leq c l |1/n|^U, U \in (0, 1/2), x \in [a, b]$ .

当  $u \in H[a, b], U \in (0, 1), k = d/2 - \epsilon$  时,

$$\|T(x) - u_n(x)\| \leq \begin{cases} C \|T\| |1/n|^U & \epsilon > 0 \\ C \|T\| |1/\ln n|^{1/2} & \epsilon = 0 \end{cases} \quad U \in (0, \epsilon)$$

### 3 算 例

首先用式 (13) 确定  $\lambda$  射角, 从而确定  $p$ , 这是很关键的, 计算中我们取  $H = 58.36, V_0(x) = 0.02056x + 2.5, V_0 = 2.5$ , 用  $T_1 = \pi/10, T_2 = \pi/12, T_3 = \pi/8.6$ , 初始入射角按公式  $x = \int_0^h (pV(x) / \sqrt{1 - p^2 V(x)^2}) dy$  求取  $x$  的值作为数据 (其中  $V(x) = V_0(x) + 0.01 \sin x$ ), 再按近似式 (13), 利用文 [6] 中的区域收缩进化策略求  $p_i$ , 实际这里是求入射角  $T_i$ , 得出计算结果为  $T_1 = 0.31415914, T_2 = 0.26180569, T_3 = 0.36530110$

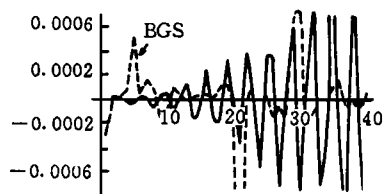


图 1 函数 1 的 BS 解与真实解的曲线

Fig. 1 Curves of function 1 for BS and true solutions

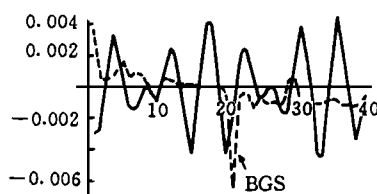


图 2 函数 2 的 BS 解与真实解的曲线

Fig. 2 Curves of function 2 for BS and true solutions

均有小数点后 5~6 位的精确度, 应注意, (13) 式中的小量  $X$  应当在微调时再使用, 即先利用  $x \approx \int_0^h (pV_0 / \sqrt{1 - p^2 V_0^2}) dy$  计算, 当适应值提高到 0.999 后, 再加上微调量  $X$ . 如果计算适应值下降, 则改变微调量. 计算时统一取  $X = 0.0004$ , 计算结果的精度是可观的. 如果不加微调量  $X$ , 则  $T = 0.31420 \dots$ , 精度可到小数点后 3 位.

实验表明可用精度较高的入射角  $T_i$  的值,在 B-G方法的算例中,取  $T$  的精确值及 10个矩量,10个矩量对应的入射角分别是  $T=\pi/(8.6+i)$  ( $i=0,1,\cdots,9$ ).

取  $H=118.36$ ,对几种不同的函数进行数值计算,实验结果如下:

数值实验 1(实验结果见图 1)

$$H=118.36, v(x)=0.011x+2.5$$

$$T(x)=0.01\sin(0.01x)^2\cos 2x$$

数值试验 2(实验结果见图 2):

$$H=118.36, v(x)=0.011x+2.5$$

$$T(x)=0.01\sin 2x\cos 3x^\circ x/(1+2x).$$

## 参 考 文 献

- 1 杨文采.地球物理反演与地震层析成像.北京:地质出版社,1990
- 2 张智江,李岳生.介质反射系数的反演方法及其计算机实现.高等学校计算数学学报,1996,18(1): 1~10
- 3 朱介寿,刘福田,王椿镛,等.研究地壳上地幔结构的地震体波计算方法.北京:科学出版社,1988
- 4 Madrid J A, Traslósheros J C V. Joint determination of velocity structure and depth of discontinuities Geophys J Int, 1993,112 74~80
- 5 Moore B J. Seismic rags in media with slight lateral variation in velocity. Geop J Int, 1991,105 213~227
- 6 阮晓青.数理方程反问题与地球物理参数识别: [博士学位论文].广州:中山大学岭南学院,1996
- 7 Kirsch A, Schomburg B, Berndt G. The Backus-Gilbert method. Inverse Problems, 1988,4 771~783

## Linearization for the Traveltime Equation of Seismic Inversion Problems

Ruan Xiaoqing\* Zhou Bing Sun Wei

**Abstract** A new method of linearization for the traveltime equation of seismic inversion problems is presented. Some numerical experiments show that the method is stable, efficient and easy to implement.

**Keywords** traveltime, inversion, B-G method

\* Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275.