

生产规模报酬参数及与成本函数弹性的关系^{*}

张 华 嘉

(中山大学岭南学院, 广州 510275)

摘 要 给出了弹性的数学概念和基本性质, 并用生产函数的弹性作为生产规模报酬的数量指标, 证明了生产函数弹性与成本函数弹性的倒数关系, 从而给出了生产规模报酬与用平均成本划分的三个生产阶段的关系.

关键词 弹性, 生产规模报酬, 生产的三个阶段

分类号 F 016

在经济学中, 增长率是一个十分重要而基本的概念, 而应变量的增长率与自变量的增长率之比就是弹性. 本文给出了一元和多元函数弹性的数学概念和基本数学性质.

在微观经济学中, 只定义了生产规模报酬递增、不变和递减, 并无作进一步的定量讨论. 本文证明了生产函数弹性是生产规模报酬的数量指标, 并用弹性的数学性质证明了生产函数弹性与成本函数弹性互为倒数, 从而在数学上证明了平均成本变化与生产规模报酬是生产效率两种等价表达形式, 其中一推论是平均成本下降 (不变, 上升) 等价于生产规模报酬递增 (不变, 递减).

另外, 本文从经济直观上讨论了引起生产规模报酬变化和平均成本变化的几个因素.

1 弹性的数学概念及性质

先介绍弹性的概念

定义 1 设 $y = f(x)$, 记 $\frac{ef}{ex} = f'(x)x / f(x)$, 并称之为 f 在 x 的弹性.

其直观为 x 增加 1% 引起 y 增加的百分数^[1].

例 1 设 $f(x) = x^a$, 则 $\frac{ef}{ex} = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{ax^{a-1}}{x^a} x = a$.

例 2 设 $f(x) = e^x$, 则 $\frac{ef}{ex} = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{e^x x}{e^x} = x$.

定义 2 设多元函数 $y = f(X)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 记 $\frac{ef}{eX} = \sum_{i=1}^n f'_i(X)x_i / f(X)$, 并称之为多元函数 f 在 X 的弹性^[1].

其直观为 X 同比例增加 1% 引起 y 增加的百分数.

^{*} 国家自然科学基金 (19471088) 资助项目

收稿日期: 1996-10-30 张华嘉, 男, 33 岁, 讲师

例 3 设 $f(X) = e^{x+y}$, 则 $\frac{ef}{eX} = \frac{f'_{xX}}{f} + \frac{f'_{yY}}{f} = \frac{e^{x+y}}{e^{x+y}}x + \frac{e^{x+y}}{e^{x+y}}y = x+y$.

下面给出弹性的数学性质.

引理 1 设多元函数 $y = f(X), y = g(X), X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, 则

- (1) $\frac{ekf(X)}{eX} = \frac{ef(X)}{eX}$ (其中 k 为常数);
- (2) $\frac{e(f+g)}{eX} = \frac{f}{f+g} \frac{ef}{eX} + \frac{g}{f+g} \frac{eg}{eX}$;
- (3) $\frac{e(f-g)}{eX} = \frac{f}{f-g} \frac{ef}{eX} - \frac{g}{f-g} \frac{eg}{eX}$;
- (4) $\frac{e(f \circ g)}{eX} = \frac{ef}{eX} + \frac{eg}{eX}$;
- (5) $\frac{e(f/g)}{eX} = \frac{ef}{eX} - \frac{eg}{eX}$;
- (6) 设 $y = f(z)$, 则 $\frac{e(f(g(X)))}{eX} = \frac{ef}{ez} \frac{eg}{eX}$;
- (7) 设 $y = f(x)$ 可逆, 则 $\frac{ef}{ex} = 1 \left| \frac{ef^{-1}}{ey} \right|$.

证明 可直接从定义 1, 2 中验证.

下面给出弹性的数学性质.

引理 2 设 $y = f(X), f(x) \geq 0$, 在某区间上

- (1) $\frac{f(x)}{x} \uparrow \Leftrightarrow \frac{ef}{ex} \geq 1$
- (2) $\frac{f(x)}{x} \downarrow \Leftrightarrow \frac{ef}{ex} \leq 1$

证明 (1) $\frac{f(x)}{x} \uparrow \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x)x - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \left(\frac{f'(x)x}{f(x)} - 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)x}{f(x)} \geq 1$
 (2) 同理可证.

引理 3 (弹性的中值公式). 设 $y = f(X)$ 为多元函数, $\lambda \geq 1$. 则

- (1) $\exists \leq \lambda \leq \lambda$ 使 $\frac{f(\lambda X)}{f(X)} = \lambda^{\frac{ef}{ex}}$, 其中 $\frac{ef}{ex}(X)$ 表示 $\frac{ef}{ex}$ 在 YX 取值;
- (2) $\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \frac{\ln f(\lambda X) - \ln f(X)}{\ln \lambda - \ln 1} = \frac{ef}{eX}(X)$, 其中 $\frac{ef}{eX}$ 在 X 取值.

证明 设 $g(\lambda) = f(\lambda X)$

$$\frac{\ln f(\lambda X) - \ln f(X)}{\ln \lambda - \ln 1} = \frac{\ln(\lambda) - \ln g(1)}{\ln \lambda - \ln 1} = \frac{g'(Y)/g(Y)}{1/Y} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{f'_i(Y) Y_{xi}}{f(Y)} = \frac{ef}{eX}(X)$$

其中, $\leq \lambda \leq \lambda$

所以 $\ln \frac{f(\lambda X)}{f(X)} = \frac{ef}{eX} \ln \lambda = \ln \lambda^{\frac{ef}{ex}}$

所以 $f(\lambda X)/f(X) = \lambda^{\frac{ef}{ex}}$ (其中 $\frac{ef}{ex}$ 在 YX 取值)

因为 $\frac{\ln f(\lambda X) - \ln f(X)}{\ln \lambda - \ln 1} = \frac{ef}{eX}(YX)$

所以 $\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \frac{\ln f(\lambda X) - \ln f(X)}{\ln \lambda - \ln 1} = \frac{ef}{eX}(X)$.

2 生产规模报酬的弹性指标

定义 3 设 $f(X)$ 为厂商的生产函数, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为可变生产要素, B 为 R^n 中某邻域, 任给 $\lambda \geq 1$, 当 $X, \lambda X \in B$ 时, 有 $f(\lambda X) \geq \lambda f(X) (= \leq)$, 称 f 在 B 上生产规模报酬递增 (不变, 递减).

定理 1 设 $f(X)$ 为生产函数, B 为某邻域. 则

(1) $\frac{ef}{eX} \geq 1$ 在 $X \in B$ 成立 $\Leftrightarrow f$ 在 B 上生产规模报酬递增;

(2) $\frac{ef}{eX} = 1$ 在 $X \in B$ 成立 $\Leftrightarrow f$ 在 B 上生产规模报酬不变;

(3) $\frac{ef}{eX} \leq 1$ 在 $X \in B$ 成立 $\Leftrightarrow f$ 在 B 上生产规模报酬递减.

证明 (1) $\Rightarrow$: $\forall \lambda \geq 1$, 设 $X, \lambda X \in B$, 由引理 3 得

$$\frac{f(\lambda X)}{f(X)} = \lambda \frac{ef}{eX} \left(\frac{ef}{eX} \text{ 在 } Y_X \text{ 取值} \right),$$

因为 $X, \lambda X \in B$, 所以 $Y_X \in B$,

所以 $\frac{ef}{eX} (Y_X) \geq 1$

所以 $\frac{f(\lambda X)}{f(X)} = \lambda \frac{ef}{eX} \geq \lambda$ 即 $f(\lambda X) \geq \lambda f(X)$

$\Leftarrow$: $\forall \lambda \geq 1$, 设 $X, \lambda X \in B$

因为 $f(\lambda X) \geq \lambda f(X)$

所以 $\frac{\ln f(\lambda X) - \ln f(X)}{\ln \lambda - \ln 1} \geq 1$

所以 $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\ln f(\lambda X) - \ln f(X)}{\ln \lambda - \ln 1} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\ln f(\lambda X) - \ln f(X)}{\ln \lambda - \ln 1} = \sum_{i=1}^n \frac{f'_i(Y_X) Y_{X_i}}{f(Y_X)} = \frac{ef}{eX} (X) \geq 1$

(2)、(3)同理可证.

下面给出生产规模报酬的数量指标.

设 $y = x e^a$, 则 $\ln y - \ln x = a$, 所以 $\ln y - \ln x$ 表示指数增长率. 当 $y \approx x$ 时, 可知, $\ln y - \ln x \approx \frac{y-x}{x}$, 所以指数增长率近似于增长率.

设 $f(X)$ 为生产函数, 则引理 3 的经济直观是, 当 X 以指数增长率同比例增加 $\ln \lambda$ 倍时, 产量 $f(X)$ 以指数增加 $\ln \lambda \frac{ef}{eX} (Y_X)$ 倍. 当 $\lambda \rightarrow 1$ 时, $\frac{ef}{eX} (X)$ 表示 X 同比例增加 $\lambda - 1$ 倍时, 产量 $f(X)$ 增加 $(\lambda - 1) \frac{ef}{eX} (X)$ 倍. 所以当 $\frac{ef}{eX} (X) \geq 1 (= \leq)$ 时, 表示 $f(X)$ 在 X 点生产规模报酬递增 (不变, 递减). 所以 $\frac{ef}{eX}$ 表示 $f(X)$ 在 X 点的生产规模报酬的数量指标^[2].

例 4 设 $f(X) = x^T y^U$, $X \in R^n$, $\lambda \geq 1$, 则 $f(\lambda X) = \lambda^T x^T y^U$.

当 $T \cup \{1\} (= , <)$ 时, $f(\lambda X) \geq \lambda f(X) (= \leq)$, 所以 $f(X)$ 在 R^n 生产规模报酬递增 (不变, 递减). 因为 $\frac{ef}{eX} = T \cup \{1\}$, 所以 $T \cup \{1\}$ 为 $f(X)$ 的弹性指标. 下面我们从经济直观上分析引起生产规模报酬的几个因素.

(1) 随着生产规模扩大, 使分工、专业化生产成为可能, 并随专业化程度不断提高, 使生产效率不断提高, 从而使生产规模报酬递增.

(2) 随着生产规模扩大,越来越多的专业设备投入生产,提高了生产效率,从而使生产规模效应递增.

(3) 随着生产规模扩大,生产方式只是重复扩大,并没有增加分工、专业化程度、机械设
备化程度,则生产效率并无提高,这时生产规模报酬不变.

(4) 随着生产规模扩大,可变生产要素与不变生产要素或隐含不变生产要素的“配合”
从越来越好,到最好,到越来越坏,使生产规模报酬从递增到不变再到递减.例如在 1 hm^2
地上种农作物,随着劳动力的增加,生产效率从越来越好到最高,再到不断下降.

(5) 随着生产规模扩大,可变生产要素与“滞后”的生产要素的配合程度越来越小,使生
产规模报酬不断递减

3 弹性与成本函数

设某厂商的成本函数为 $C(Q)$, 平均成本函数 $\bar{C}(Q) = C(Q)/Q$, 经验表明, $\bar{C}(Q)$ 呈 U 型
(见图 1).

定义 4 设 $0 \leq Q_1 \leq Q_2 \leq +\infty$, 在 $[0, Q_1]$ 上
 $\bar{C}(Q) \downarrow$, 称为生产第一阶段, 在 $[Q_1, Q_2]$ 上
 $\bar{C}(Q)$ 不变, 称为生产第二阶段, 在 $[Q_2, +\infty]$ 上
 $\bar{C}(Q) \uparrow$, 称为生产第三阶段.

下面给出成本函数弹性表示的 3 个阶段.

定理 2 (1) $\frac{C}{Q} \searrow \Leftrightarrow \bar{C}(Q) \downarrow \Leftrightarrow$ 在第一、二
阶段;

(2) $\frac{C}{Q} \nearrow \Leftrightarrow \bar{C}(Q) \uparrow \Leftrightarrow$ 在第二、三
阶段;

(3) 在 $[Q_1, Q_2]$ 上 $\frac{C}{Q} \equiv \bar{C}(Q) \Leftrightarrow$ 在 $[Q_1, Q_2]$ 上为第二阶段.

证明 由引理 2 得证.

从经济直观看, 平均成本下降、不变和上升分别表示生产效率的提高、不变和下降, 在假
设生产要素价格不变情况下, 引起平均成本变化的因素与引起生产规模报酬的因素一致.
因此, 下面将会得到, 平均成本变化与生产规模报酬变化是同一件事情的两方面, 都是生产
效率的表示, 下一节用弹性的数学理论给出其互为倒数的弹性关系.

4 一致性定理

本节的讨论假设生产要素价格不变.

在长期中, 设 $f(X)$ 为生产函数, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为生产要素, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 为
 X 的价格向量, 记 Q 为产量, 则成本函数为

$$C(Q) = \min_{i=1}^n p_i x_i$$

$$\text{s. t. } f(X) = Q$$

记 $X(Q)$ 为生产要素的最佳配置, 可得下面定理 3.

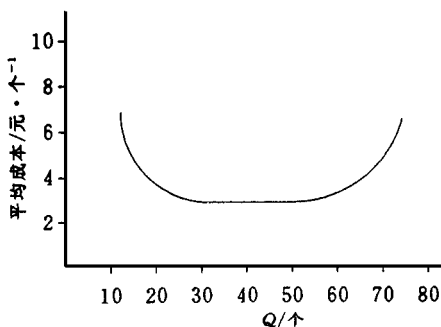


图 1 U型平均成本曲线

Fig. 1 U-shaped average cost curve

定理 3 假设如上. 则 $\frac{eC}{eQ} = 1/\frac{ef}{eX}$, 其中 $\frac{ef}{eX}$ 在 $X(Q)$ 取值.

证明 因为 $C(Q) = \min_{i=1}^n p_i x_i$

$$\text{s. t. } f(X) = Q$$

设 $X(Q)$ 为生产要素最佳配置

由拉格朗日方法得 $X(Q)$ 满足方程

$$\begin{cases} \frac{p_1}{f_1} = \frac{p_2}{f_2} = \dots = \frac{p_n}{f_n} \Leftrightarrow \frac{p_1 x_1}{f_1 x_1} = \frac{p_2 x_2}{f_2 x_2} = \dots = \frac{p_n x_n}{f_n x_n} \Leftrightarrow \\ f(X) = Q \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{p_1 x_1}{f_1 x_1} = \frac{p_2 x_2}{f_2 x_2} = \dots = \frac{p_n x_n}{f_n x_n} \Leftrightarrow \\ f(X) = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p_1 x_1}{f_1 x_1} = \frac{p_2 x_2}{f_2 x_2} = \dots = \frac{p_n x_n}{f_n x_n} \Leftrightarrow \\ f(X) = Q \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{p_1 x_1}{f_1 x_1} = \frac{p_2 x_2}{f_2 x_2} = \dots = \frac{p_n x_n}{f_n x_n} \Leftrightarrow \\ f(X) = Q \end{cases}$$

把上式相加, 得

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p_1 x_1}{ef} = \dots = \frac{p_n x_n}{ef} = \frac{C(Q)}{ef} \\ f(X) = Q \end{cases}$$

因为 $C(Q) = \sum_{i=1}^n p_i x_i(Q)$

$$\text{所以 } \frac{eC}{eQ} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i x_i}{C(Q)} \frac{ep_i x_i}{eQ} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i x_i}{C(Q)} \frac{ex_i}{eQ} = \frac{1}{C(Q)} \sum_{i=1}^n \frac{p_i x_i}{ef} \frac{ex_i}{eQ} =$$

$$\frac{1}{C(Q)} \frac{C(Q)}{ef} \sum_{i=1}^n \frac{ef}{ex_i} \frac{ex_i}{eQ}$$

因为 $f(X(Q)) = Q$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{ef}{ex_i} \frac{ex_i}{eQ} = 1$$

$$\text{所以 } \frac{eC}{eQ} = 1/\frac{ef}{eX}.$$

下面两例说明生产函数弹性与成本函数弹性互为倒数^[3].

例 5 设 $f(X) = \overline{xy}$, p, q 分别为 x, y 的价格, 由计算得

$$C(Q) = 2 \overline{pqQ}, \frac{ef}{eX} = 1, \frac{eC}{eQ} = 1$$

$f(\lambda X) = \lambda f(X)$, 即生产规模报酬不变.

$\bar{C}(Q) = 2 \overline{pq}$ 在生产第二阶段.

例 6 设 $f(X) = x^2 + y^2$, p, q 分别为 x, y 的价格, 由计算得

$$C(Q) = \overline{(p^2 + q^2)Q}, \frac{ef}{eX} = 2, \frac{eC}{eQ} = \frac{1}{2}$$

$f(\lambda X) \geq \lambda f(X)$, 即生产规模报酬递增.

$\bar{C}(Q) = 2 \overline{(p^2 + q^2)}/Q$ 在生产第一阶段.

推论 1 (一致性定理). 平均成本下降 (最小, 上升) 与生产规模报酬递增 (不变, 递减)

一致.

证明 由定理 3,因 $\frac{eC}{eQ}=1/\frac{ef}{eX}$ 则 $\frac{eC}{eQ}\leq 1(=\geq)\Leftrightarrow\frac{ef}{eX}\geq 1(=\leq)$
由引理 2,得证 .
总结来说 ,定理 3 不仅证明了平均成本变化与生产规模报酬的一致性 ,并且证明了两弹性互为倒数的数量关系 .

参 考 文 献

1 Hal R, Varian. Microeconomic Analysis(Second Edition). New York W W Norton& Company, 1984. 18~ 20, 39~ 40
2 吉尔·戈蒂埃,佛朗索瓦勒·勒鲁. 微观经济学. 何方译. 北京: 中国人民大学出版社, 1991. 87~ 88
3 Eugene Siberberg. The Structure of Economics. A Mathematical Analysis. 2nd ed. New York McGraw-Hill Publishing Company, 1990. 275~ 277

The Index of Economics of Scale and Its Relation
to the Elasticity of Cost Function

Zhang Huajia^{*}

Abstract The mathematical concepts and fundamental properties of elasticity are discussed. It is proved that the elasticity of production function is the index of economics of scale and that the elasticity of production function is the reciprocal of that of cost function and gives the relationship between the economics of scale and the average cost function in three production stages.
Keywords elasticity, economics of scale, three production stages

^{*} Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275.
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>