

补偿紧性在任意阶奇异摄动守恒律中的应用^{*}

殷 朝 阳

(中山大学物理学系, 广州 510275)

摘 要 研究了一类任意阶的奇异摄动守恒律方程, 通过应用补偿紧性方法和能量估计方法, 得到了该类摄动方程解的收敛性和正则性.

关键词 补偿紧性, 能量估计, 解的收敛性, 解的正则性

分类号 O 175. 6

本文主要研究如下摄动守恒律方程:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x \pm W u^{(n)} = X u_{xx} & n \text{ 为奇数} \\ u_t + f(u)_x + (-1)^{\frac{n}{2}} W u^{(n)} = X u_{xx} & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (1)$$

这里假定 $f(\cdot)$ 是 $R^N \rightarrow R^N$ 的光滑的非线性映射, W 和 X 是零附近的两个正摄动. 本文的目的在于揭示方程 (1) 和其守恒律方程: $u_t + f(u)_x = 0$ 之间解的收敛性和正则性问题. 最早, M. Schonbek^[1] 在 $n=3$, $f(u)=u^2$ 的条件下, 研究了问题 (1), 并得到: 如果 $W \leq kX^{\frac{1}{2}}$ (k 为一常数) 当 X 趋于零时, 方程 (1): $u_t + u^\circ u_x \pm W u_{xxx} = X u_{xx}$ 的解 $\{u^\delta\}$ 存在一个子列在 $L^p(K)$ ($1 < p < 4$) 中几乎逐点收敛于方程: $u_t + u^\circ u_x = 0$ 的解 u , 且 $u \in L^4(K)$. 当 $W \geq kX$ 时, 解的收敛性是一开问题. 进而, B. Cassis^[2] 在 $n=4$, $|f'(u)| \leq C(1+|u|)$, $C > 0$ 的条件下, 研究了问题 (1) 并得到: 如果 $W \geq kX^{\frac{1}{2}}$ (k 是一常数), 当 X 趋于零时, 方程 $u_t + f(u)_x + W u_{xxx} = X u_{xx}$ 的解 $\{u^\delta\}$ 存在一个子列在 $L^p(K)$ ($1 < p < 4$) 中几乎逐点收敛于守恒律方程: $u_t + f(u)_x = 0$ 的解 u , 且 $u \in L^4(K)$; 当 $W \leq kX^{\frac{1}{2}}$ 时, 方程解的收敛性是一开问题. 本文应用补偿紧性方法, 能量估计方法以及 Burger 方程解的特殊结构, 对任意的自然数 n , $|f'(u)| \leq C(1+|u|)$ 的条件下, 揭示了问题 (1) 和其守恒律方程解的收敛关系, 并进而改善了解的正则性.

1 关于 Burger 方程解的 3 个积分不等式

本节主要利用 Burger 方程解的特殊结构以及能量估计方法获得几个非常有用和重要的一致估计.

定理 1 设 $\{u^\delta\}$ 是如下 Burger 方程的解序列:

$$u_t + u^\circ u_x = X u_{xx} \quad t > 0, -\infty < x < +\infty \quad (2)$$

且满足 $|u_0^\delta| \leq C$, 这里 $u_0^\delta = u^\delta(x, 0)$, $|\cdot|_{2n}$ 表示 $H^{2n}(R)$ 的范数, ($n \geq 0$), $C > 0$, 那么对

^{*} 国家博士后基金 (019B230) 资助项目

收稿日期: 1997-02-26 殷朝阳, 男, 29 岁, 博士后

方程 (2) 的解 $\{u^X\}$, 有:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \leq C^\circ X^{4(n-1)+3} \quad (n \geq 0) \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n)}|^2 dx \leq C^\circ X^{4n} \quad (n \geq 0) \quad (4)$$

$$|u^{(n-1)}|_\infty \leq C^\circ X^{(2n-1)} \quad (n \geq 1) \quad (5)$$

这里 C 是仅与初始值有关的任意正常数.

证明 因为 $u_0^X(x) \in H^{2n}(R)$, 从而 $\{u^X\}$ 有足够的正则性, 且 $u^X(t, \cdot) \in H^{2n-1}(R)$, 从而成立有 $u^{(m)}(t, \pm\infty) = 0$ ($m = 0, 1, \dots, 2n$). 证明可利用 Galerkin 方法^[1-3].

为了证明 (3-5) 式, 首先获得几个积分不等式:

用 $u(x, t), -u_{xx}, u^{(4)}, \dots, (-1)^n u^{(2n-4)}$ 分别乘以方程 (2) 的两边, 再关于变量 x 和变量 t 积分, 然后分部积分最后整理得:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx + \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx dt \leq C \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx + \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx dt \leq C + \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^\circ u_{xx} dx dt \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx + \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xxx}|^2 dx dt \leq C - \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^\circ u^{(4)} dx dt \quad (8)$$

.....

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-2)}|^2 dx + \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \leq C - (-1)^n \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^\circ u^{(2n-4)} dx dt \quad (9)$$

以上 $0 \leq r \leq T$, 下面方便起见, 本文将不提 r 的范围.

有了以上不等式, 下面用数学归纳法证明 (3-5) 式. (1) 当 $n=1$ 时, 证明定理 1 的结论正确. 在此仅需证明: $n=0, 1$ 时 (3) 和 (4) 成立. $n=1$ 时 (5) 成立即可.

由 (6) 式, 可得 $\int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx dt \leq C^\circ X^1$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx \leq C$, 下面, 再由 (7) 式可有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx + \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx dt &\leq C + \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^\circ u_{xx} dx dt \\ &\leq C + \frac{2}{X} \left(\int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^2 dx dt \right) + \frac{X}{2} \left(\int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx dt \right) \\ &\leq C + |u|_\infty^2 C^\circ X^2 + \frac{X}{2} \left(\int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx dt \right) \end{aligned}$$

又因 $|u^2(x, r)| \leq 2 \int_{-\infty}^x |u^\circ u_x| dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
从而得 $|u| \leq C^\circ X^{\frac{1}{2}}$

故有 $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx + \frac{X}{2} \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx dt \leq C^\circ X^4$

故至此已证明 $n \leq 1$ 时, (3), (4) 和 (5) 式成立, 即

$$\int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx dt \leq C^\circ X^1, \int_0^r \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx dt \leq C^\circ X^5$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx \leq C, \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx \leq C^\circ X^4 \text{ 和 } |u|_\infty \leq C^\circ X^1$$

(2) 假设当 $n \leq k-1$ 时 (3-5) 式成立; 特别, 当 $n=k-1$ 时有:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+2)}|^2 dx dt \leq C^\circ X^{4k-5}; \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+1)}|^2 dx \leq C^\circ X^{4k-4} \text{ 和 } |u^{(k)}|_\infty \leq C^\circ X^{2k-1}$$

下面,证明 $n = k+2$ 时, (3), (4) 和 (5) 式成立:

用 $(-1)^k u^{(2k+4)}$ 乘以方程 (2) 的两边, 再关于变量 x 和变量 t 积分, 分部积分后, 整理得

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+2)}|^2 dx + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+3)}|^2 dx dt \leq C (-1)^k \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^\circ u^{(2k+4)} dx dt \quad (10)$$

$$\text{由于 } \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^\circ u^{(2k+4)} dx dt \leq (-1)^{(k+1)} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (u^\circ u_x)^\circ u^{(k+1)}^\circ u^{(k+3)} dx dt \quad (11)$$

$$\text{和 } (u^\circ u_x)^\circ u^{(k+1)} = u^{(k+1)}^\circ u_x + \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} u^{(k)} u_{xx} + \cdots + u^\circ u^{(k+2)}$$

$$\text{其中第 } j \text{ 项为 } \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} u^{(j)} u^{(k-j+2)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k+1)$$

$$\text{故有 } \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x^\circ u^{(2k+4)} dx dt = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^k \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} u^{(j)} u^{(k-j+2)} u^{(k+3)} dx dt$$

$$\text{当 } j \neq k+1 \text{ 时: } \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} u^{(j)} u^{(k-j+2)} u^{(k+3)} dx dt \leq$$

$$\begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix}^2 \cdot \frac{(k+2)}{2X} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(j)} \cdot u^{(k-j+2)}|^2 dx dt + \frac{X}{2k+4} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+3)}|^2 dx dt \leq$$

$$C \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix}^2 \cdot \frac{k+2}{2} \cdot X^{4k-8} + \frac{X}{2k+4} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+3)}|^2 dx dt$$

$$\text{当 } j = k+1 \text{ 时: } \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u^{(k+1)} u^{(1)} \cdot u^{(k+3)} dx dt \leq$$

$$\frac{k+2}{2X} \cdot |u^{(1)}|_\infty^2 \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+1)}|^2 dx dt + \frac{X}{2k+4} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+3)}|^2 dx dt \leq$$

$$C^\circ \begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot X^{4k-8} + \frac{X}{2k+4} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+3)}|^2 dx dt$$

再利用不等式 (10) 和 (11), 有

$$\frac{X}{2} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+3)}|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+2)}|^2 dx \leq C^\circ X^{4k-8} \quad (12)$$

$$\text{故得: } \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+3)}|^2 dx dt \leq C^\circ X^{4k-9} \text{ 和 } \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+2)}|^2 dx \leq C^\circ X^{4k-8}$$

下面估计 $|u^{(k+1)}|_\infty$, 利用 (12) 式, 有:

$$|u^{(k+1)}| \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+1)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(k+2)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C^\circ X^{2k-4} \cdot X^{2k-2} = C^\circ X^{4k-6}$$

$$\text{即得 } |u^{(k+1)}|_\infty \leq C^\circ X^{2k-3}$$

这样在 $n = k+2$ 时, 定理的结论成立. 从而结合第 (1) 步和第 (2) 步, 由归纳法知, 对任何正整数 n , 定理结论成立.

2 主要定理及其证明

本节针对方程 (1), 在 $f(u) = u^2/2$, n 为任意自然数的条件下, 讨论了解的收敛性和正则性, 并且该方法还可推广至 $|f'(u)| \leq C(1 + |u|)$ 情形. 在证明主要结论之前, 先介绍一些必要定义和引理

定义 1^[1,2] 一对映射 $(Z, q): R^n \rightarrow R$, 若对所有如下守恒律方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 的解 u 成立有: $Z(u)_t + q(u)_x = 0$ 则称 (Z, q) 是一对熵-熵通量对.

引理 1^[1,2] 假设 $f \in C^1$ 且满足增长性条件: $f(u) = o(|u|^p)$, 当 $|u| \rightarrow +\infty$ 和 $|f'(u)| \leq C(1 + |u|^{p-1})$, 对某一 $p > 1$, 并且设 $\{u^X\}$ 是方程

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (13)$$

的逼近解序列, 并在 $L^p(K)$ 中一致有界, 且对 $\forall \lambda \in C_0^2(K)$ 和 $Z(\lambda)f'(\lambda) = q'(\lambda)$, 满足条件

$Z(u^X)_t + q(u^X)_x \in [H^{-1}(K)]$ 的紧子集 $\mathcal{B}$ [测度空间 $M(K)$ 有界集]. 那么 $\{u^X\}$ 存在一子序列 $\{u^k\}$, 且成立 $u^k \rightharpoonup u$ 和 $f(u^k) \rightharpoonup f(u)$ ($k \rightarrow +\infty$), 且 u 是方程 (13) 的精确解. 进而, 如果 $f'' > 0$, 那么 $u^k \rightarrow u$ (在 $L^r(K)$ 中, $1 < r < p$).

下面, 给出本文的主要定理.

定理 2 假设 $K = R \times [0, T]$, $T > 0$, $\{u^X\}: K \rightarrow R$ 是方程 (1), (在 $f(u) = u^2/2$ 条件下) 的光滑解序列, $u^X(t, \cdot) \in H^{2m-1}(R)$, 令 $u^X(0, x) = u_0^X(x)$, 且满足 $\|u_0^X(x)\|_{n-2} + \|u_0^X\|_{2m} \leq C$, 其中 $\|\cdot\|_{n-2}$ 表示 $H^{n-2}(R)$ 中的范数; $\|\cdot\|_{2m}$ 表示 $L^{2m}(R)$ 中的范数, m 和 n 是两个正整数, 如果 $\mathcal{B} \subset C^{2m-m-4}$, 那么存在一子列 (仍记为) $\{u^X\}$, $\lim_{X \rightarrow 0} u^X = u$, 且在 $L^p(K)$ 中 ($1 < p < 2m$), $u \in L^{2m}(K)$ 是守恒律方程 (13) 的精确解.

证明 因为 $u^X(t, \cdot) \in H^{2m-1}(R)$, 从而 $\{u^X\}$ 有足够的正则性可以使下面的运算有意义, 且 $(u^X)^{(k)}(t, \pm\infty) = 0$, ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$). 为了方便起见, 本文将沿用如下记号:

$A \in BM(K)$: 表示 A 是测度空间 $M(K)$ 中的有界集;

$A \in Hc^1(K)$: 表示 A 是 $H^{-1}(K)$ 中的紧子集;

$A \in L^p_c(K)$: 表示 A 是 $L^p(K)$ 中的紧子集;

$A \in L^p_b(K)$: 表示 A 是 $L^p(K)$ 中的有界集.

由引理 1 知, 仅需证明 $\{u^X\}$ 满足 $\{u^X\} \in L^{2m}_b(K)$ 和如下熵条件即可:

$$Z(u^X)_t + q(u^X)_x \in Hc^{-1}(K) + BM(K), \text{ 其中, } \forall (Z, q) \in C^2, \text{ 且 } Z(\lambda), f'(\lambda) = q'(\lambda) \quad (14)$$

这里, Z 具紧支集, 在任何非空区域内是凸的.

以下简记 $u^X = u^X$, 且当抽取子列时, 仍用 $\{u^X\}$ 来表示. 因为 $\{u^X\}$ 满足方程 (1), 从而有

$$Z(u^X)_t + q'(u^X)_x = -WZ(u^X)(u^X)^{(n)} + XZ'(u^X)u^{Xx}$$

$$\text{又因 } -WZ(u^X)(u^X)^{(n)} = -(WZ(u^X)(u^X)^{(n-1)})_x + WZ'(u^X)u^{Xx}(u^X)^{(n-1)}$$

$$\text{和 } XZ'(u^X)u^{Xx} = (XZ'(u^X)u^{Xx})_x - XZ''(u^X) \cdot (u^X)^2$$

从而为证明条件 (14) 式, 仅需证明:

$$\{WZ(u^X)(u^X)^{(n-1)}\}, \{XZ'(u^X)u^{Xx}\} \in L^2_c(K) \quad (15)$$

$$\{WZ'(u^X)u^{Xx}(u^X)^{(n-1)}\}, \{XZ''(u^X)(u^X)^2\} \in L^1_b(K) \quad (16)$$

又因微分算子是 $L^2(K) \rightarrow H^{-1}(K)$ 的连续算子, 再由 Z 的性质, 仅需证明如下条件即可:

$$\{W(u^X)^{(n-1)}\}, \{X u^{Xx}\} \in L^2_c(K) \quad (17)$$

$$\{W u^{Xx}(u^X)^{(n-1)}\}, \{X(u^{Xx})^2\} \in L^1_b(K) \quad (18)$$

$$\{u^X\} \in L^{2m}_b \quad (19)$$

下面, 将 n 分为奇偶来证明条件 (17-19) 成立.

(I) n 为奇数情形

用 $u(x, t)$, $-u^{xx}$, $u^{(4)}$, $\dots$ 和 $(-1)^n u^{(2n-4)}$ 分别乘以方程 (1) 的两边, 再关于变量 x 和变量 t 积分, 分部积分后, 整理得

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx dt \leq C \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx dt \leq C + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x u_{xx} dx dt \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xxx}|^2 dx dt \leq C + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x u^{(4)} dx dt \quad (22)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-2)}|^2 dx + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \leq C + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} u^\circ u_x u^{(2n-4)} dx dt \quad (23)$$

这样由定理 1 的证明过程可得

$$\int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \leq C W X^{4n-7} \quad (24)$$

若 $W \leq C \circ X^{-\frac{7}{2}}$, $\forall C > 0$, 不等式 (24) 蕴含下两式

$$\int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \leq C \quad (25)$$

$$\int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x u^{(n-1)}| dx dt \leq \left(\int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \circ W X^{2n-3} \quad (26)$$

如果 $W \leq C \circ X^{2n-3}$, 那么不等式 (26) 蕴含下式

$$\int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x u^{(n-1)}| dx dt \leq C \quad (27)$$

由 (20) 式知: $\{u_{tx}^X\} \in L_c^2(K)$ 和 $\{X(u_x^X)^2\} \in L_b^1(K)$. 再由 (25~27) 式知 $W \leq C X^{2n-3}$ 时有 $\{W(u^{(n-1)})^X\} \in L_c^2(K)$ 和 $\{W u_x^X (u^{(n-1)})^X\} \in L_b^1(K)$.

至此已证明条件 (17) 和 (18) 成立, 下面再证明条件 (19) 成立.

用 u^{2m-1} 乘以方程 (1) 的两边, 再关于变量 x 和变量 t 积分, 分部积分后整理得:

$$\frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m} dx + \frac{(2m-1)}{2} \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m-2} u_x^2 dx dt \leq C + \frac{(2m-1)}{2} \cdot X^{4n-2m-8} \cdot W$$

故当 $W \leq C X^{2n-m-4}$ 时, $\{u^X\}$ 满足条件 (17~19), 从而当 n 为奇数时, 定理结论成立.

(II) n 为偶数情形

用 $u(x, t), -u_{xx}, u^{(4)}, \dots, (-1)^{\frac{n}{2}-1} u^{(n-2)}$ 和 u^{2m-1} 分别乘以方程 (1) 的两边, 再关于变量 x 和变量 t 积分, 整理得

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx dt + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(\frac{n}{2})}|^2 dx dt \leq C \quad (28)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx dt + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(\frac{n}{2}+1)}|^2 dx dt \leq C + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x \circ u_{xx} dx dt \quad (29)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}|^2 dx + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xxx}|^2 dx dt + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(\frac{n}{2}+2)}|^2 dx dt \leq C + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x \circ u^{(4)} dx dt \quad (30)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(\frac{n}{2}-1)}|^2 dx + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(\frac{n}{2})}|^2 dx dt + \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \leq C + (-1)^{\frac{n}{2}} \int_0^{r+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^\circ u_x \circ u^{(n-2)} dx dt \quad (31)$$

$$\frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m} dx + (2m-1) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m-2} u_x^2 dx dt \leq C + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m-1} \cdot u^{(n-1)} dx dt \quad (32)$$

因而由定理 1 的证明过程可得

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \leq C \cdot W \cdot X^{4n+7} \quad (33)$$

又因

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x u^{(n-1)}|^2 dx dt &\leq \\ &\left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^{(n-1)}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &C \cdot W \cdot X^{2n+3} \end{aligned} \quad (34)$$

从而由 (28) 式, (33) 式和 (34) 式知, 如果 $W \leq C X^{2n-3}$, 那么有 u^X 满足条件 (17) 和 (18), 下证 u^X 满足 (19) 式.

由 (32) 式可得

$$\frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m} dx + \frac{(2m-1)}{2} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m-2} \cdot u_x^2 dx dt \leq C + \frac{(2m-1)}{2} X^{4n-2m+8} \cdot W$$

因此, 当 $W \leq C \cdot X^{2n-m-4}$ 时, $\{u^X\}$ 满足条件 (17~19), 这样当 n 为偶数时, 定理结论也成立.

注 1 当 $|f'(u)| \leq C(1+|u|)$ 时, $f'' > 0$, n 为任意自然数的条件下, 定理 2 结论仍成立. 具体证明类同, 从略.

参 考 文 献

- 1 Schonbek M E. Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations. Comm in Partial Differential Equations, 1982, 7(8): 959~1000
- 2 Cassis B. Compensated compactness applied to a singular perturbed fourth order P. D. E. Comm in Partial Differential Equations. 1989, 14(5): 619~634
- 3 李大潜, 陈韵梅. 非线性发展方程. 北京: 科学出版社, 1989. 9~12

Compensated Compactness Applied to Singular Perturbed P. D. E. of an Arbitrary Order

Yin Zhaoyang^{*}

Abstract The compensated compactness method is applied to study the convergence and the regularity of solutions of the singular perturbed P. D. E. of any order. The convergence and regularity of solutions are also obtained.

Keywords compensated compactness, energy estimate, the convergence of solution, the regularity of solution

^{*} Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275