

广义紧邻 Ising 过程的存在性及遍历性^{*}

张 刚 强

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 提出一类新的粒子系统——广义紧邻 Ising 过程, 证明了过程的存在性, 讨论了过程的遍历性. 而“一般 Ising 过程”和“改进的 Ising 过程”均为它的特殊形式.

关键词 Ising 过程, 速度函数, 存在性, 遍历性

分类号 O 221. 62

Ising 模型是统计物理中最著名的模型之一, 对于一般 Ising 模型的研究已有 50 多年的历史, 对低维情形已研究得比较透彻, 但对于高维情形 (三维以上) 的研究却进展缓慢. 本文提出一类新的粒子系统“广义紧邻 Ising 过程”具有一般性, 研究它有一定的意义. 文章所采用的符号全部来自严士健教授专著《无穷粒子马尔可夫过程引论》一书.

定义 设 $X = \{0, 1\}^S$, $S = \mathbb{Z}^d$, 其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, d 表示空间的维数, 定义一个速度函数

$$C = (u, Z) = \left\{ \lambda + \exp \left[U \sum_{v: |v-u|=1} (2Z(u) - 1)(2Z(v) - 1) \right] \right\}^{-1} \quad (1)$$

其中, $u \in S$, $Z \in X$, Z 为 $S \rightarrow \{0, 1\}$ 上的函数, 参数 $\lambda \geq 0$, $U > 0$, 称具有上述速度函数的 Ising 过程为“广义紧邻 Ising 过程”.

定理 1 广义紧邻 Ising 过程存在.

证明 显然 $\forall u \in S, C(u, \cdot)$ 是连续的, 且 $\|C(u, \cdot)\| = \sup_{Z \in X} C(u, Z) \leq e^{2dU} < +\infty$, 故 $C(u, \cdot)$ 是 $C_b(X)$ 中的一致有界非负函数. 当 $|w - u| \geq 2$ 时

$$C(u, Z_w) = C(u, Z) \quad (2)$$

又
$$U \sum_{|v-u|=1} (2Z(u) - 1)(2Z(v) - 1) = U(2Z(u) - 1) \left[\sum_{|v-u|=1} 2Z(v) - 2d \right]$$

而
$$Z_u(v) = \begin{cases} Z(v), & \text{当 } u \neq v \\ 1 - Z(v), & \text{当 } u = v \end{cases} \quad (3)$$

故 (1) 式可具体如下表示:

* 国家自然科学基金 (01010904) 资助项目

收稿日期: 1997-07-21 张刚强, 男, 33岁, 讲师, 广东教育学院访问学者

$$C(u, Z) = \begin{cases} (\lambda + e^{2dU})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 1, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 2d \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^0)^{-1}, \text{当 } Z(u) = 1, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = d \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{-2dU})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 1, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{(2d-2)U})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 0, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 1 \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^0)^{-1}, \text{当 } Z(u) = 0, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = d \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{-2dU})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 0, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 2d \end{cases} \quad (4)$$

类似于 (4) 式可以写出

$$C(u, Z_u) = \begin{cases} (\lambda + e^{-2dU})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 1, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 2d \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^0)^{-1}, \text{当 } Z(u) = 1, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = d \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{2dU})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 1, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{(-2d+2)U})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 0, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 1 \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^0)^{-1}, \text{当 } Z(u) = 0, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = d \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{2dU})^{-1}, \text{当 } Z(u) = 0, \sum_{|v-u|=1} Z(v) = 2d \end{cases} \quad (5)$$

由 (4), (5) 两式可得

$$\Delta_{C(u, \cdot)}(u) = \sup_{Z \in X} |C(u, Z_u) - C(u, Z)| = \sup \left\{ \left| \frac{1}{\lambda + e^{-2kU}} - \frac{1}{\lambda + e^{-2kU}} \right| : k = 1, 2, \dots, d \right\} \quad (6)$$

又因为当 $k > 0$ 时

$$0 < \frac{1}{\lambda + e^{-2kU}} - \frac{1}{\lambda + e^{2kU}} \leq e^{2kU} \leq e^{2dU} \quad (7)$$

故有

$$\Delta_{C(u, \cdot)}(u) \leq e^{2dU} \quad (8)$$

当 $|w - u| \geq 2$ 时, 由 (2) 式可知

$$\Delta_{C(u, \cdot)}(w) = \sup_{Z \in X} |C(u, Z_w) - C(u, Z)| = 0 \quad (9)$$

当 $|w - u| = 1$ 时, 再来估计 $\Delta_{C(u, \cdot)}(w)$ 的值

$$C(u, Z_w) = \left\{ \lambda + \exp \left[U \sum_{\substack{|v-u|=1 \\ v \neq w}} (2Z_w(u) - 1)(2Z_w(v) - 1) \right] \right\}^{-1} =$$

$$\left\{ \lambda + \exp \left[U \sum_{\substack{|v-u|=1 \\ v \neq w}} (2Z(u) - 1)(2Z(v) - 1) - U(2Z(u) - 1)(2Z(w) - 1) \right] \right\}^{-1} \quad (10)$$

$$C(u, Z) = \left\{ \lambda + \exp \left[U \sum_{\substack{|v-u|=1 \\ v \neq w}} (2Z(u) - 1)(2Z(v) - 1) + \right. \right.$$

$$U(2Z(u) - 1)(2Z(w) - 1)]\}^{-1} \quad (11)$$

分情况讨论 $\Delta_{C(u, \cdot)}(w)$ 的值

① 当 $|w - u| = 1, Z(u) = 1, Z(w) = 1$ 时, 由 (10) 式可得

$$C(u, Z_w) = \begin{cases} (\lambda + e^{(2d-2)U})^{-1}, & \text{当 } \sum_{\substack{|v-u|=1 \\ v \neq w}} Z(v) = 2d-1 \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{-2dU})^{-1}, & \text{当 } \sum_{\substack{|v-u|=1 \\ v \neq w}} Z(v) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

由 (11) 式可得

$$C(u, Z) = \begin{cases} (\lambda + e^{-2dU})^{-1}, & \text{当 } \sum_{\substack{|v-u|=1 \\ v \neq w}} Z(v) = 2d-1 \\ \dots\dots\dots \\ (\lambda + e^{-(2d-2)U})^{-1}, & \text{当 } \sum_{\substack{|v-u|=1 \\ v \neq w}} Z(v) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

此时有

$$\Delta_{C(u, \cdot)}(w) = \sup_{k \in X} |C(u, Z_w) - C(u, Z)| = \sup \left\{ \left| \frac{1}{\lambda + e^{2kU}} - \frac{1}{\lambda + e^{(2k-2)U}} \right| : k = -d+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, d \right\} \quad (14)$$

类似于①可以讨论其他 3 种情形的 $\Delta_{C(u, \cdot)}(w)$ 的值: ② 当 $|w - u| = 1, Z(u) = 1, Z(w) = 0$ 时; ③ 当 $|w - u| = 1, Z(u) = 0, Z(w) = 1$ 时; ④ 当 $|w - u| = 1, Z(u) = 0, Z(w) = 0$ 时. 总之, 不论何种情形, 只要当 $|w - u| = 1$ 时均有 (14) 式成立. 同时

$$\left| \frac{1}{\lambda + e^{2kU}} - \frac{1}{\lambda + e^{(2k-2)U}} \right| \leq \max \left\{ \frac{|e^{2kU} - e^{(2k-2)U}|}{\lambda + e^{2kU}}, \frac{|e^{2kU} - e^{(2k-2)U}|}{\lambda + e^{(2k-2)U}} \right\} \leq \max \{ (1 - e^{-2U}), (e^{2U} - 1) \} \leq e^{2U} \quad (15)$$

再由 (14) 式知: 当 $|w - u| = 1$ 时, 成立

$$\Delta_{C(u, \cdot)}(w) \leq e^{2U} \quad (16)$$

由 (8) (9) (16) 3 式可得

$$\begin{aligned} |||C(u, \cdot)||| &= \sum_{w \in S} \Delta_{C(u, \cdot)}(w) = \Delta_{C(u, \cdot)}(u) + \sum_{|w-u|=1} \Delta_{C(u, \cdot)}(w) + \\ &\sum_{|w-u| \geq 2} \Delta_{C(u, \cdot)}(w) \leq e^{2dU} + 2de^{2U} < \infty \end{aligned} \quad (17)$$

由 (17) 式及文 [1] 定理 1.2.7 知: 广义紧邻 Ising 过程存在.

定理 2 ① 当 $\lambda = 0, U$ 满足 $de^{2dU}(1 - e^{-2U}) < 1$ 时过程遍历; ② 当 $0 < \lambda < 1, U < \frac{1}{2} \ln$

$\frac{d+1}{d-\lambda}$ 时过程遍历; ③ 当 $\lambda = 1, U < \frac{1}{2} \ln \frac{d+1}{d-1}$ 时过程遍历; ④ 当 $\lambda > 1, U$ 满足下式时过程遍历

$$\frac{2d(e^{2U} - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda + e^{2U})} < \frac{1}{\lambda + e^{2dU}} + \frac{1}{\lambda + e^{-2dU}}$$

证明 由 (15) 式知: 当 $|u - w| \geq 2$ 时, $\Delta_{C(u, \cdot)}(w) = 0$; $|u - w| = 1$ 时, $\Delta_{C(u, \cdot)}(w) =$

$$\sup \left\{ \left| \frac{1}{\lambda + e^{2kU}} - \frac{1}{\lambda + e^{(2k-2)U}} \right| : k = -d+1, -d+2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, d \right\}$$

$$M = \sup_{u \in \mathbb{Z}^d} \sum_{w \neq u} \Delta_{C(u, \cdot)}(w) \quad (18)$$

讨论之, 由 (18) 式可得:

① 当 $\lambda = 0$ 时, 在 $k = -d + 1, \Delta_{C(u, \cdot)}(w)$ 达到最大值, 此时, $\Delta_{C(u, \cdot)}(w) =$

$$\left| \frac{1}{e^{(-2d+2)U}} - \frac{1}{e^{-2U}} \right| = e^{2dU} (1 - e^{-2U}). \text{故有, } M = 2d e^{2dU} (1 - e^{-2U}).$$

② 当 $0 < \lambda < 1$ 时, 在 $k = 0, \Delta_{C(u, \cdot)}(w)$ 达到最大值, 此时, $\Delta_{C(u, \cdot)}(w) =$

$$\left| \frac{1}{\lambda + 1} - \frac{1}{\lambda + e^{-2U}} \right| = \frac{1 - e^{-2U}}{(\lambda + 1)(\lambda + e^{-2U})}, \text{故有, } M = \frac{2d(1 - e^{-2U})}{(\lambda + 1)(\lambda + e^{-2U})}.$$

③ 当 $\lambda = 1$ 时, 在 $k = 1, \Delta_{C(u, \cdot)}(w)$ 达到最大值, 此时, $\Delta_{C(u, \cdot)}(w) = \left| \frac{1}{1 + e^{2U}} - \frac{1}{2} \right| =$

$$\frac{e^{2U} - 1}{2(e^{2U} + 1)}, \text{故有, } M = \frac{2d(e^{2U} - 1)}{2(e^{2U} + 1)}$$

④ 当 $\lambda > 1$ 时, 在 $k = 1, \Delta_{C(u, \cdot)}(w)$ 达到最大值, 此时, $\Delta_{C(u, \cdot)}(w) =$

$$\left| \frac{1}{1 + e^{2U}} - \frac{1}{\lambda + 1} \right| = \frac{e^{2U} - 1}{(\lambda + 1)(\lambda + e^{2U})}, \text{故有, } M = \frac{2d(e^{2U} - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda + e^{2U})}.$$

由 (4), (5) 两式可得

$$X = \inf_{u \in \mathbb{Z}^d} \inf_{Z \in \mathcal{X}} \{C(u, Z) + C(u, Z_u)\} = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda + e^{2U}} + \frac{1}{\lambda + e^{-2U}}; k = 0, 1, 2, \dots, d \right\} \quad (19)$$

可以得到以下结论:

当 $\lambda = 0$ 时, 在 $k = 0, X$ 达到最小值, 且 $X = 2$; 当 $0 < \lambda < 1$ 时, 在 $k = 0, X$ 达到最小值, 且 $X = 2/(\lambda + 1)$; 当 $\lambda = 1$ 时, 在 $k = 0, X$ 达到最小值, 且 $X = 1$; 当 $\lambda > 1$ 时, 在 $k = d, X$ 达到最小值, 且 $X = 1/(\lambda + e^{2dU}) + 1/(\lambda + e^{-2dU})$.

据文 [1] 定理 1.4.5 知: 当 $M < X$ 时, 过程遍历, 由此可得下列结论:

① 当 $\lambda = 0$ 时, (1) 式定义的过程化为“一般紧邻 Ising 过程”. 当 $M < X$ 此时 U 满足 $d e^{2dU} (1 - e^{-2U}) < 1$ 时过程遍历, 特别地, $d = 1$ 时, $U < 1/2 \ln 2 \approx 0.347$, 一维紧邻 Ising 过程遍历; 当 $d = 1$ 时, $U < 1/2 \ln[(1 + \sqrt{3})/2] \approx 0.156$, 二维紧邻 Ising 过程遍历. 这在文 [1] 的例 1.4.6 已有结论, 但由于文 [1] 例 1.4.6 是本定理 $\lambda = 0$ 的特殊情况, 因此在此情形计算 M 及 X 要容易, 而本定理中的 M 与 X 的计算要复杂得多. 故本定理证明的方法与文 [1] 例 1.4.6 所用的方法不完全一致.

② 当 $0 < \lambda < 1, M < X$ 即 $d(1 - e^{-2U})/(\lambda + e^{-2U}) < 1, U < 1/2 \ln[(d+1)/(d-\lambda)]$ 时, 广义紧邻 Ising 过程遍历.

③ 当 $\lambda = 1$ 时, (1) 式定义的过程化为“改进的紧邻 Ising 过程”, 由 $M < X$ 即 $\frac{2d(e^{2U} - 1)}{2(e^{2U} + 1)} < 1$, 也就是 $U < \frac{1}{2} \ln \frac{d+1}{d-1} (d \geq 2)$ 时, 改进紧邻 Ising 过程恒遍历; 特别地, $d = 1$ 时, 一维改进紧邻 Ising 过程恒遍历; $d = 2$ 时, 当 $U < 1/2 \ln 3 \approx 0.549$, 二维改进紧邻 Ising 过程遍历; $d = 3$ 时, 当 $U < 1/2 \ln 2 \approx 0.34$, 三维改进紧邻 Ising 过程遍历. 此为文 [2] 1.4 例 4.3(a) 的结论, 但可以看出改进紧邻 Ising 过程的遍历域更大, 因此结果更优.

④ 当 $\lambda > 1, M < X$ 即 U 满足 $\frac{2d(e^{2U} - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda + e^{2U})} < \frac{1}{\lambda + e^{2dU}} + \frac{1}{\lambda + e^{-2dU}}$ 时, 广义紧邻 Ising 过程遍历.

特别取 $d = 1, U < \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\lambda^2 + 2\lambda - 1 + \sqrt{(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2 + (\lambda + 3)(\lambda - 1)}}{\lambda - 1} \right]$ 时, 一

维广义紧邻 Ising 过程遍历.

至此各种情形下过程的遍历性讨论完毕.

参 考 文 献

- 1 严士健. 无穷粒子马尔可夫过程引论. 北京: 北京师范大学出版社, 1989. 18~ 58
- 2 Liggett T M. Interacting particle systems. New York Springer-Verlag, 1985. 30~ 42

Existence and Ergodicity of Generalized Nearest-Neighbor Ising Process

Zhang Gangqiang^{*}

Abstract Presents a new partical system, generalized nearest-neighbor Ising process, and proves the existence of the process. Also discusses the ergodicity of the process. Ordinary Ising process and alternative Ising process are particular forms of the process.

Keywords Ising process, rate function, existence, ergodicity

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275