

圆管 O-S 方程的 Chebyshev 多项式方法^{*}

王香蕊 詹杰民 张涤明 万卓培
(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘要 采用一般形式的 Chebyshev 多项式展开方法, 对圆管 Poiseuille 流的 O-S 方程进行数值模拟. 发现所有特征值的虚部都小于零, 因此, 验证圆管 Poiseuille 流对于轴对称的小扰动来说是线性稳定的, 结果还表明应用 Chebyshev 多项式在计算结果精度方面有较大的优越性.

关键词 流动稳定性, O-S 方程, Chebyshev 多项式

分类号 O 357. 1

对于 O-S 方程线性稳定性的求解, 目前主要有差分法、打靶法和正交函数展开法. 对于正交函数展开法, 它的优点主要体现在 2 个方面: ① 精度高, 因为在理论上一个无穷可微的周期函数的第 K 项 Fourier 系数比 K 的任何负幂次方都衰减得快; ② 有准确的空间微分, 因为对空间坐标的微分可在谱空间中的解析方式准确地求得, 不存在数值粘性.

Orszag^[1]提出了 1 种方法, 其精度是已有方法中最高的^[2], 即用 Chebyshev 多项式展开法, 把流函数展开为 $H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(y)$, 其中, $T_n(y)$ 为第一类 Chebyshev 多项式. 对平面 Poiseuille 流动, 根据解的奇偶性, Orszag 仅取 n 为偶数的 T_n , 然后用这种方法对 O-S 方程进行求解, 得到了比其它方法更为精确的结果. 对于圆管 Poiseuille 流动 O-S 方程, 也曾有学者^[3]提出用偶数项的 Chebyshev 多项式对流函数进行数值模拟. 但圆管 Poiseuille 流动中, $r \in [0, 1]$, 并没有平面 Poiseuille 流中的函数在区间 $[-1, 1]$ 上那样严格的对称关系, 因此, 在圆管 Poiseuille 流动中是否存在对称的概念尚且存疑. 其次, 采用偶数项的 Chebyshev 多项式展开, 要将 $H(r)$ 的 q 阶导数 $\frac{d^q H}{dr^q} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} T_{2n}(r)$ 中的系数 $a_n^{(q)}$ 用 a_n 表示出来, 但这里并不能将所有方程中的项都用偶次项表示出来.

1 方程和边界条件

基于以上原因, 本文采用 Chebyshev 多项式的一般形式, 对圆管轴向扰动稳定性问题, 有如下的 O-S 方程

$$(u-c)(H'' - H' / r - T^2 H) - (u'' - u' / r) H - \frac{1}{iTR} \left[H^{(4)} - \frac{2}{r} H^{(3)} + \left(\frac{3}{r^2} - 2T^2 \right) \left[H'' - \frac{1}{r} H' \right] + TH \right] \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金 (19472078) 资助项目

收稿日期: 1998-02-09 王香蕊, 女, 24 岁, 研究生

其中, $u= 1- r^2$. 方程边界条件为 $H(1)= H'(1)= 0, \lim_{r \rightarrow 0} H(r) / r= 0, \lim_{r \rightarrow 0} H'(r) / r < + \infty$.

设解为 $H(r)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(r)$ (2)

有 $\frac{d^q H}{dr^q} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} T_n(r)$, 而 $a_n^{(0)} = a_n$, 其中, $T_n(r)$ 为第一类 Chebyshev 多项式, 式中 $a_n^{(q)}$ 与 a_n 的递归关系为

$$c_n a_n^{(1)} = 2 \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^{\infty} p a_p, \quad c_n a_n^{(2)} = \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \equiv 2 \pmod{2}}}^{\infty} p(p^2 - n^2) a_p$$

$$c_n a_n^{(3)} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{p=n+3 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^{\infty} p [(p-1)^2 - n^2] [(p+1)^2 - n^2] a_p$$

$$c_n a_n^{(4)} = \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p+n \equiv 2 \pmod{2}}}^{\infty} p [p^2(p^2-4)^2 - 3n^2 p^4 + 3n^4 p^2 - n^2(n^2-4)^2] a_p$$

由递归关系 $2x T_n(x) = c_n T_{n+1}(x) + d_{n-1} T_{n-1}(x)$,

得 $2rH(r)$ 的 n 阶 Chebyshev 系数为 $c_{n-1} a_{n-1} + a_{n+1}$

$4r^2 H(r)$ 的 n 阶 Chebyshev 系数为 $c_{n-2} a_{n-2} + (c_{n+1} c_{n-1}) a_{n+1} + a_{n+2} d_{k_{n-1}}$

$8r^3 H(r)$ 的 n 阶 Chebyshev 系数为 $c_{n-3} a_{n-3} + H_{n-1} a_{n-1} + E_n a_{n+1} d_{k_{n+1}} + a_{n+3} d_{k_{n+2}}$

$16r^4 H(r)$ 的 n 阶 Chebyshev 系数为 $c_{n-4} a_{n-4} + (E_{n-2} + 1) c_{n-2} a_{n-2} + M_n c_{n+1}$

$(E_{n+1}) d_{k_{n-1}} a_{n+2} + d_{k_{n+3}} a_{n+4}$

$32r^5 H(r)$ 的 n 阶 Chebyshev 系数为 $c_{n-5} a_{n-5} (E_{n-3} + 2) c_{n-3} a_{n-3} + F_{n-1} c_{n-1} a_{n-1} +$

$F_n d_{k_n} a_{n+1} + (E_{n+2}) d_{k_{n-2}} a_{n+3} + d_{k_{n+4}} a_{n+5}$

其中, $c_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 2 & n = 0 \\ 1 & n > 0 \end{cases}$ $d_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1 & n > 0 \end{cases}$ $d_{k_n} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & n \geq N \end{cases}$

$E_n = c_{n-1} + c_{n+1}$ $F_n = c_{n-2} + c_{n-1}^2 + 3c_{n-1} + c_{n+1}^2 + 2c_{n+2}$

$H_n = c_{n-1} + c_{n+1}^2 + c_n$ $M_n = c_{n-2} + c_{n-1}^2 + 2c_{n-1} + c_{n+1}$

从以上 $rH(r)$, $r^3 H(r)$ 和 $r^5 H(r)$ 的系数结果可以看出, 若用偶数项 Chebyshev 多项式展开, 0-S 方程中仍将出现奇次项的系数, 最终不能统一为偶次项系数的代数方程, 因此, 需要用一般的表达形式.

综合以上结果, 将 (2) 式及 $u= 1- r^2$ 代入 0-S 方程并整理可得

$A_{n+1} - i A_n = \lambda B_n$ (3)

其中, $A_n = \frac{TR}{32} \left\{ \sum_{\substack{p=n-3 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ -d_{n-5} p [p^2 - (n-5)^2] + 4d_{n-4} p \right\} a_p + \right.$

$\sum_{\substack{p=n-1 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ d_{n-3} (2 - E_{n-3}) p [p^2 - (n-3)^2] + 4d_{n-2} (E_{n-2} - 3) p \right\} a_p +$

$\sum_{\substack{p=n-1 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ d_{n-1} (4E_{n-1} - F_{n-1}) p [p^2 - (n-1)^2] + 4(M_n - 4c_{n-1} - 4) p \right\} a_p +$

$\left. \sum_{\substack{p=n-3 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ d_{k_n} (4E_n - F_n) p [p^2 - (n+1)^2] + 4d_{k_{n-1}} (E_n - 3) p \right\} a_p \right\}$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ dk_{n+2} (2 - E_n) p [p^2 - (n+3)^2] + 4dk_{n+3} p \right\} a_{p+} \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ -dk_{n+4} p [p^2 - (n+5)^2] \right\} a_{p+} + T^3 [c_{n-5} a_{n-5} + (E_{n-3} - 2) c_{n-3} a_{n-3} + \\
 & (F_{n-1} - 4E_{n-1}) c_{n-1} a_{n-1} + dk_n (F_n - 4E_n) a_n + dk_{n+2} (E_n - 2) a_{n+2} + dk_{n+4} a_{n+4} \} \\
 A_i = & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ -\frac{1}{4} d_{n-3} T^3 p [p^2 - (n-3)^2] + d_{n-2} T^3 p \right\} a_{p+} \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \frac{1}{192} d_{n-3} \left\{ p^3 (p^2 - 4)^2 - 3(n-3)^2 p^5 + 3(n-3)^4 p^3 - p(n-3)^2 [(n-3)^2 - 4]^2 \right\} - \\
 & (1/8) d_{n-2} p [(p-1)^2 - (n-2)^2] + [(p+1)^2 - (n-2)^2] + \\
 & (1/4) d_{n-1} (6 - T^2 E_{n-1}) p [p^2 - (n-1)^2] + \left\{ T^2 c_{n-1} + T^2 - (6/c_i) \right\} p \} a_{p+} \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ \frac{1}{192} d_{n-1} E_n \left\{ p^3 (p^2 - 4)^2 - 3(n-1)^2 p^5 + 3(n-1)^4 p^3 - \right. \right. \\
 & p(n-1)^2 [(n-1)^2 - 4]^2 \} - (1/8) (c_{n-1} + 1) p [(p-1)^2 - n^2] [(p+1)^2 - n^2] - \\
 & (1/4) dk_n (6 - T^2 E_n) p [p^2 - (n+1)^2] + dk_{n+1} T^2 p \} a_{p+} \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ \frac{1}{192} dk_n z_n \left\{ p^3 (p^2 - 4)^2 - 3(n+1)^2 p^5 + 3(n+1)^4 p^3 - \right. \right. \\
 & p(n+1)^2 [(n+1)^2 - 4]^2 \} - (1/8) dk_{n+1} p [(p-1)^2 - (n+2)^2] [(p+1)^2 - \\
 & (n+2)^2] - (1/4) dk_{n+2} T^2 p [p^2 - (n+3)^2] \} a_{p+} \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \frac{1}{192} dk_{n+7} \left\{ p^3 (p^2 - 4)^2 - 3(n+3)^2 p^5 + 3(n+3)^4 p^3 - \right. \\
 & p(n+3)^2 [(n+3)^2 - 4]^2 \} a_{p+} + (T^4/8) \left\{ c_{n-3} a_{n-3} + E_n - 1 c_{n-1} a_{n-1} + E_n dk_n a_n + dk_{n+2} a_{n+2} \right\} \} \\
 B_i = & \frac{TR}{8} \left\{ \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ d_{n-3} p [p^2 - (n-3)^2] - 4d_{n-2} p \right\} a_{p+} \right. \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N d_{n-1} E_{n-1} p [p^2 - (n-1)^2] - 4(c_{n-1} + 1) p \} a_{p+} \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N dk_n E_n p [p^2 - (n+1)^2] - 4dk_{n+1} p \} a_{p+} \\
 & \sum_{\substack{p+ \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N \left\{ dk_{n+2} p [p^2 - (n+3)^2] \right\} a_{p-} \\
 & \left. T^2 (c_{n-3} a_{n-3} + E_n - 1 c_{n-1} a_{n-1} + dk_n E_n a_n + dk_{n+2} a_{n+2}) \right\}
 \end{aligned}$$

边界条件为: $\sum_{n=0}^N a_n = 0; \sum_{n=0}^N n^2 a_n = 0; \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N (-1)^{[n/2]} a_n = 0; \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N (-1)^{[(n-1)/2]} n a_n = 0.$

由 (3) 式得到 $N+1$ 个方程, $N+1$ 个未知数的方程组, 再加上上面 4 个边界条件, 共 $N+5$ 个方程. 本文采用 Lanczo^[5] 中所述的 f 方法, 对 (3) 式只取 $n = 0, 1, 2, \dots, N-4$, 加上 4 个边界条件, 就只有 $N+1$ 个方程, 也就是说高阶频率的特征不是由 (3) 式决定, 而

是由边界条件决定. 接下来用 QR 算法求特征值.

2 计算结果和讨论

为验证该模型的正确性, 首先对 $T=6.2$, $R=500$ 进行计算, 并和 Davey 等^[4]的计算结果相比较, 可见只需取 48 项 (相当于平板 Poiseuille 流只采取偶次项展开时的 24 项), 便可达到 10^{-5} 的精度:

Davey 方法	$C_1 = 0.9492$	$C_2 = -0.0632$	
	$N = 48$	$C_1 = 0.949207$	$C_2 = -0.063202$
本文	$N = 49$	$C_1 = 0.949202$	$C_2 = -0.063201$
	$N = 50$	$C_1 = 0.949200$	$C_2 = -0.063201$

对 T 取 0.5 到 5, R 从 3 000 到 30 000, 其中 T 间隔取为 0.25, R 间隔取为 3 000 来进行计算, 这 190 组 T, R 所得到的特征值的等值线图如图 1.

由计算结果可知, 采用 Chebyshev 多项式, 对圆管 O-S 方程的稳定性问题进行研究, 其特征值的精度的确很高 (可达 10^{-5}), 并由图 1 可得, 圆管 Poiseuille 流动对于轴对称的小扰动是线性稳定的, 这和前人^[5]的结果是相吻合的.

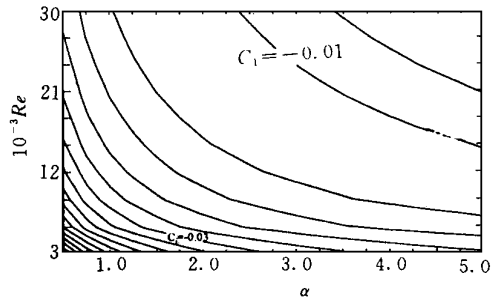


图 1 不同雷诺数 Re 和波数 T 下的 C_1 值

Fig. 1 The values of C_1 with reference to T and Re

参 考 文 献

- Orszag A S. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. J F M, 1971, 50: 689
- 是勋刚. 湍流. 天津: 天津大学出版社, 1994. 1-43
- 周哲伟. 圆管 Poiseuille 流动中平均速度的一种修正剖面及其稳定性研究. 应用数学和力学, 1988, 9 (1): 73-82
- Davey A, Nguyen H P F. Finite-amplitude stability of pipe flow. J F M, 1971, 45: 701-720
- 赵耕夫. 圆管 Poiseuille 流轴对称有限扰动稳定性研究. 见: 徐复主编. 第三届全国流体力学学术会议论文集. 北京: 科学出版社, 1988. 21-24

Chebyshev Polynomial Method in Solving the Stability O-S Equation of Pipe Flow

Wang Xiangrui* Zhan Jiemin Zhang Diming Wan Zhuopei

Abstract The O-S equation is solved numerically for pipe Poiseuille flow by using the Chebyshev polynomial method. All the eigenvalues are proved to be negative and it is shown that the circular Poiseuille flow is stable with axisymmetric infinitesimal disturbances. The numerical results are of high accuracy.

Keywords flow-stability, O-S equation, Chebyshev polynomial

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China