

利用投影来判定线段与平面相交性的新方法^{*}

逯 峰 关履泰

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275)

摘 要 通过平面的半空间的性质与投影方法的结合, 成功地实现线段与封闭曲线形成的平面的相交性的判别, 同时给出了一种计算线段与平面交点的新算法.

关键词 相交性判别, 半空间, 单调, 二分法, 坐标平面

分类号 TP 391. 72

在 CAD/CAM 中, 三维空间中某线段与某些封闭曲线所围成的有限平面的相交性判别是相当重要的. 其相交性判别包含 2 部分的问题: ① 如何判定线段与此有限平面相交; ② 若二者相交, 如何计算其交点. 目前一般采用的方法是先假设此线段和该有限平面都是无限的, 联立方程组, 求其交点, 然后再对其交点进行有效性判断. 这样工作量大而且效率很低, 而本文提出的原理与算法可大大提高其判别速度与求解效率.

1 基本原理

首先介绍三维欧氏 E^3 空间中平面的半空间定义. 所谓某平面的半空间是指在 E^3 中满足条件 $\{X | F(X) \leq 0, X \in E^3\}$ 或 $\{X | F(X) \geq 0, X \in E^3\}$ 的点集 X , 而 $F(X) = 0$ 是该平面的方程. 该平面的半空间可用下式来定义: $\{ax + by + cz + d > 0, (x, y, z) \in E^3\}$ 和 $\{ax + by + cz + d < 0, (x, y, z) \in E^3\}$ 其中 a, b 和 c 为该平面方程的系数, 分别称为该平面的正半空间与负半空间^[1]. 由平面 $F(X) = 0$ 中的封闭曲线围成的部分称为有限平面.

1.1 几个引理

由定义和图 1, 易得以下引理.

引理 1 空间有直线段 $\overline{PQ}$, 若 $F(P) \cdot F(Q) > 0$, 则此线段与该平面必不相交.

引理 2 若 $\overline{PQ}$ 与空间的某一有限平面相交, 则必有 $F(P) \cdot F(Q) \leq 0$.

1.2 直线段与有限平面相交性判别

引理 1 是可逆的, 现在面临的问题是引理 2 是否可逆, 即: 若 $F(P) \cdot F(Q) \leq 0$ 时是否一定有 $\overline{PQ}$ 与此有限平面相交. 很显然, 答案是否定的 (图 1), 此时相交问题较难判断, 在这种情况下, 如果引入投影的方法, 就可以把问题转化到平面上去, 问题得到简化. 因为在平面

^{*} 国家自然科学基金 (19571091) 和中山大学高等学术研究中心基金 (97M7) 资助项目

收稿日期: 1997-07-11 逯 峰, 男, 25 岁, 硕士研究生

上,判定某点和某线段是否包含在某一封闭曲线所围成的有界区域上的方法很多,也比较简单^[2].

以常用的参数方程形式来讨论,设给定空间封闭曲线 L 确定一有限平面 c 和线段 $\overline{PQ}$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$, 不失一般性,假设该平面与 xoy 面不垂直,把该平面 c 和 $\overline{PQ}$ 往 xoy 面上投影,其中投影成为 D , P, Q 分别投影成为 P_1 和 Q_1 ,可分为 $\overline{PQ}$ 与 xoy 面垂直和不垂直 2 种情况.

若 $\overline{PQ}$ 和 xoy 面垂直,则可直接验证 P 点和 Q 点的同一投影点是否在 D 内,即可判断.

若 $\overline{PQ}$ 和 xoy 面不垂直,则形成 $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$, L 投影成封闭曲线 L_1 ,由 L_1 形成了有界区域 D ,有以下

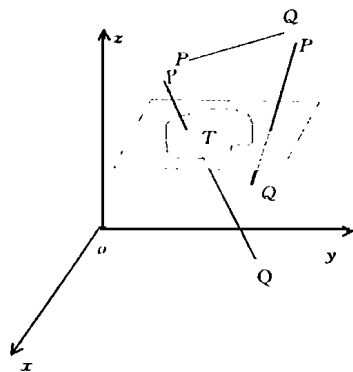


图 1 线段与平面的位置关系图

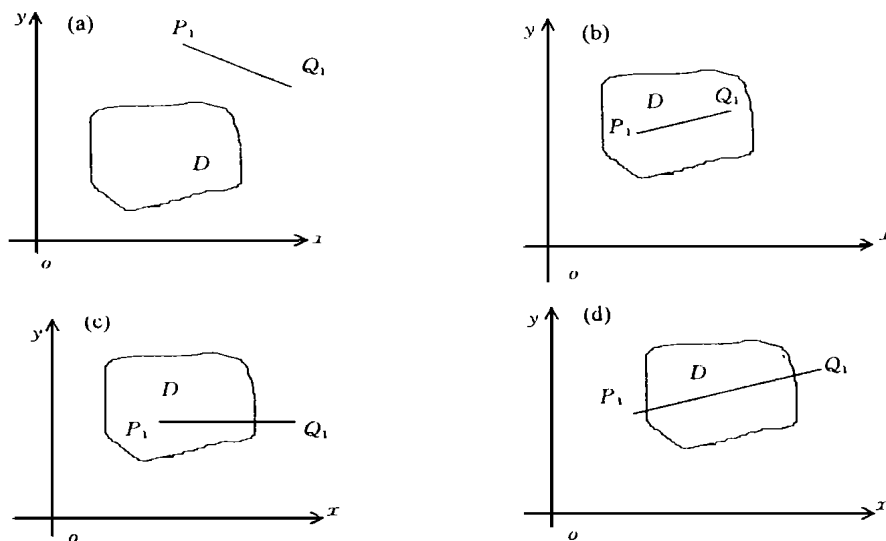


图 2 线段投影与平面投影的位置关系

定理 1 在 xoy 面上,如果 $\overline{P_1Q_1}$ 与 D 完全不相交(如图 2(a)),则 $\overline{PQ}$ 与此有限平面 c 必不相交.

证明 (反证法)假设 $\overline{PQ}$ 与 c 相交.则必存在一点 M , M 既在 $\overline{PQ}$ 上也在 c 上,于是其投影点 M_1 也一定同时在 $\overline{P_1Q_1}$ 和 D 上,即 M_1 为 $\overline{P_1Q_1}$ 与 D 的交点,与题设的条件矛盾.

下面讨论均假设 P, Q 位于不同的半空间.仿照定理 1,可得定理 2.

定理 2 在 xoy 面上,如果 $\overline{P_1Q_1}$ 完全包含在 D 内(如图 2(b)),则 $\overline{PQ}$ 与 c 必定相交.

定理 3 在 E^3 空间中, $\overline{PQ}$ 与 c 相交的充要条件是在 $\overline{PQ}$ 上存在 2 点 S, W 使得 SW 的投影 S_1W_1 包含在 D 内.

证明 充分性由定理 2 得证;

必要性: (不失一般性,设投影情况如图 2(d)),设 $\overline{PQ}$ 与 c 相交于 T 点,则其投影生成 T_1 点包含于 D ,且 T_1 落在 $\overline{PQ}$ 的投影 $\overline{P_1Q_1}$ 中.由于平面 $F(X) = 0$ 与 xoy 平面不垂直, D 是 xoy

面的 1 个封闭区域, 其边界为 L_1 , 与 $\overline{P_1Q_1}$ 交于 S_1, W_1 2 点, 且 S_1W_1 包含于 D 内, 在 S_1, W_1 处分别作 xoy 面的垂线交 $\overline{PQ}$ 于 S, W , 则必要性得证.

显然在此处应有 $F(S) \cdot F(W) < 0$. 类似地可得定理 4 如下.

定理 4 在 E^3 空间中, $\overline{PQ}$ 与 c 不相交的充要条件是在 $\overline{PQ}$ 上存在 2 点 S, W , 使 SW 在 xoy 面的投影 $S_1W_1 \cap D = \emptyset$, 其中 S_1, W_1 分别为 S, W 的投影.

根据定理 3 和定理 4 就可以对 (c) 和 (d) 的情况进行讨论了.

若 P_1, Q_1 为 (c) 所示的情况, 即一部分在 D 内, 一部分在 D 外, 按以下步骤处理:

① 取 $\overline{S_1W_1}$ 的中点 T_1 , 把 $\overline{S_1W_1}$ 分成 $\overline{S_1T_1}$ 和 $\overline{T_1W_1}$; ② 验证 $F(S_1) \cdot F(T_1)$ 和 $F(T_1) \cdot F(W_1)$, 剪裁掉大于零的半段, 取小于零的半段, 记其 2 端点为 S_1, W_1 , 验证此时的 $\overline{S_1W_1}$ 与 D 的关系: 若 $\overline{S_1W_1}$ 包含于 D , 则属于 (b) 的情况, 即 $\overline{PQ}$ 与此有限平面必定相交; 若 $\overline{S_1W_1}$ 不包含于 D , 则属于 (a) 情况, 可断定 $\overline{PQ}$ 与此有限平面不相交; 若 $\overline{S_1W_1}$ 所取的与 D 的关系不为 (a) 和 (b) 的情况之一, 则重复第 1 步, 进行有限次循环后, 必定可得到 (a) 和 (b) 的情况之一, 用第 2 步的判断方法判定是否相交.

(d) 的情况与 (c) 的情况处理方法类似, 属于 (c) 的 1 种特例, 这种情况还有很多, 都可归纳为 (c) 的特例情况来作分析.

通过以上分析, 可以成功地判别空间直线段与有限平面的相交性的问题, 稍加改动即可推广到空间曲线段与有限平面的相交性问题上去.

1.3 曲线段与有限平面相交性判断

若已知曲线段 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \text{ (其中, } t \in [a, b]), \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续且一阶光滑, 2 端点分别} \\ z = z(t) \end{cases}$

为 P, Q , 有限平面为 c , 其封闭的曲线边界方程已知, 不失一般性设平面 c 与 xoy 面不垂直.

处理曲线段的思想是通过剖分, 使其每个子段在 z 方向上单调, 通过简单的证明可知, 在每一段上完全可以利用 1.2 关于直线段的结论去进行处理, 具体的方法为 ① 剖分: 在曲线方程的第 3 个方程 $z = z(t)$ 中, 求 z 对 t 的一阶导数 $dz/dt = 0$ 的所有的解, 再求出其极值点, 由 t 的取值可计算出其对应的点的坐标, 依次可得一系列的剖分点 $T_0, T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n, T_{n+1}$, 其中 $T_0 = P, T_{n+1} = Q$, 则每一子曲线段 T_i, T_{i+1} 在 z 方向是单调的; ② 对所有的子曲线段依次按照 1.2 所提供的方法进行处理, 容易判别该子曲线段与有限平面 c 的相交性.

2 求交点的二分算法

通过对以上的分析可知, 在进行相交性判断的同时, 也能容易的得出 1 种收敛很快的求交点的计算方法, 即所谓的“二分算法”.

2.1 直线段与有限平面的交点计算

在三维欧氏空间 E^3 中, 有限平面 c 与直线段 $\overline{PQ}$ 相交, 其中 $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1)$,

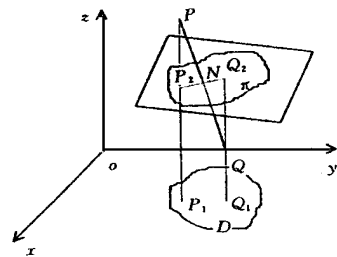


图 3 定理 2 证明图

其交点的计算可按下列步骤进行^[3]:

① 取 $\overline{PQ}$ 中点 T_1 , 产生 $\overline{PT_1}$ 与 $\overline{T_1Q}$ 2 个子直线段, 分别计算 $F(P) \cdot F(T_1)$ 和 $F(T_1) \cdot F(Q)$, 裁剪掉乘积为正的子直线段, 保留乘积为负的子直线段, 重新记其端点为 P, Q ; ② 取该子直线段的中点 T_2 , 如果 $|\overline{T_1T_2}| < X$, 则停止计算; 若 $|\overline{T_1T_2}| > X$, 则转入第 1 步, 直至 $|\overline{T_iT_{i+1}}| < X$ 时停止计算 (其中, X 为一迭代精度).

在进行了 n 次迭代后, 得 T 的估计点为 T_n , 且 $|\overline{T_nT}| < |\overline{PQ}| \cdot 2^{n-1}$, 从几何意义来说反映了 T 和 T_n 之间的接近程度, 也可利用上式去估计其误差上限.

2.2 曲线段与有限平面的交点计算

① 根据 1.3, 对曲线段 PQ 进行剖分, 使其在每一子段上单调, 挑选出与有限平面相交的子曲线段, 不妨设某一子段 SW 与有限平面相交, 记该曲线段方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

其中, $t \in [a, b]$, 设 $S(x(a), y(a), z(a)), W(x(b), y(b), z(b))$;

② 取 $t = \frac{a+b}{2}$, 则得 T_1 , 把曲线段 SW 分为 ST_1, T_1W 2 段, 计算 $F(S)F(T_1)$ 和 $F(T_1)F(W)$, 仿照 2.1 的方法, 裁剪掉乘积大于零的部分, 保留乘积小于零的部分, 记其端点分别为 S, W , 该子曲线段的定义域为 $[a_1, b_1]$;

③ 取 $t = \frac{a_1+b_1}{2}$, 得 T_2 , 把曲线段 SW 分为两部分 ST_2, T_2W , 验证是否满足 $|\overline{T_1T_2}| < X$, 若满足则停止计算; 若不满足, 则重复第 2 步, 直至距离 $|\overline{T_{n-1}T_n}| < X$ 为止 (其中 X 为某一迭代精度), T_n 即为交点的近似估计, 其误差估计与 2.1 类似.

3 算 例

利用上述算法可以进行一些简单的数值试验. 下例是由点 $(1.0, 1.0, 1.0)$ 和 $(-1.0, 2.0, -3.0)$ 生成的线段及由 $(-1, 1/2, 2/5), (1, 1/4, -1), (0, 2, -5/9)$ 生成的圆的交点的判别计算, 具体数据如表 1 (记每次迭代结果为 x_0, y_0, z_0). 本问题的真实解是 $(-2/11, 35/22, -15/11)$, 若取误差上限为 0.0001, 经过 14 次的迭代, 即可得到与真实解相当接近的近似解, 效果相当好.

下面再给出螺旋曲线段 $\begin{cases} x = 3 \sin \theta \\ y = 3 \cos \theta \\ z = 10 \end{cases} \theta \in [0, \pi/2]$ 和由 $(2, 3, 6), (4, 3, 8), (2, 1, 4),$

$(4, 1, 6)$ 生成的多边形有限平面的交点计算结果, 其精确解是 $(2.621, 1.459, 5.080)$, 利用本文算法可得较好的结果. 此处取误差上限是 0.0001, 记每次迭代结果为 x_0, y_0, z_0 , 可以看出其收敛效果是相当好的 (表 2).

表 1 直线段和圆盘交点

n	x_0	y_0	z_0
1	0.000 000	1.500 000	- 1.000 000
2	- 0.500 000	1.750 000	- 2.000 000
3	- 0.250 000	1.625 000	- 1.500 000
4	- 0.125 000	1.562 500	- 1.250 000
5	- 0.187 500	1.593 750	- 1.375 000
6	- 0.156 250	1.578 125	- 1.312 500
7	- 0.171 875	1.585 938	- 1.343 750
8	- 0.179 688	1.589 844	- 1.359 375
9	- 0.183 594	1.591 797	- 1.367 188
10	- 0.181 641	1.590 820	- 1.363 281
11	- 0.182 617	1.591 309	- 1.365 234
12	- 0.182 129	1.591 064	- 1.364 258
13	- 0.181 885	1.590 942	- 1.363 770
14	- 0.181 763	1.590 881	- 1.363 525

表 2 螺旋曲线段与四边形区域交点

n	x_0	y_0	z_0
1	2.121 322	2.121 319	7.853 975
2	2.771 639	1.148 049	3.926 988
3	2.494 410	1.666 710	5.890 481
4	2.645 764	1.414 189	4.908 734
5	2.573 186	1.542 307	5.399 608
6	2.610 262	1.478 693	5.154 171
7	2.628 211	1.446 550	5.031 453
8	2.619 286	1.462 649	5.092 812
9	2.623 761	1.454 607	5.062 132
10	2.621 526	1.458 630	5.077 472
11	2.620 407	1.460 640	5.085 142
12	2.620 967	1.459 635	5.081 306
13	2.621 247	1.459 132	5.079 389
14	2.621 107	1.459 384	5.080 348

参 考 文 献

1 夏德麟,熊鑫. 线段相交性问题求解的新算法与原理. 计算机辅助设计与图形学学报, 1996, 8 (2): 95~ 100

2 罗笑南,王若梅. 计算机图形学. 广州: 中山大学出版社, 1996. 36~ 38

3 黄友谦. 数值试验. 北京: 高等教育出版社, 1989. 45~ 63

A New Method Making Use of Projection for Intersection
between A Line Segment and A Plane

Lu Feng^{*} *Guan Lutai*^{..}

Abstract On the basis of half space equation and properties of projection, presents a new method which is able to determine the intersection between line segment and bounded plane. And, gives the new algorithm to find the intersection point between the line segment and limited plane.

Keywords intersection-determination, halfspace, monotone, equally-dividing, coordinate plane

^{*} Department of Scentific Computing and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou,