第37卷 第5期
1998年 9月
中山大学学报 (自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 37 No. 5
Sep. 1998

覆盖式不分明仿紧性*

邱道文 马剑兰
(中山大学数学系，广州 510275) (白云师范学校)

摘 要 利用包含度提出了覆盖式不分明仿紧性，并说明了它有好的推广，而且它等价于已有的各种不分明仿紧性．然后在此框架下给出几个与局部有限性紧密相关的覆盖引理，从而得到了主要结果，建立了较全面的等价刻画定理．

关键词 不分明拓扑，仿紧性，弱诱导空间，局部有限性
分类号 O 159，O 189.1

仿紧性[1]是紧性最重要的推广．因此，基于各种不分明紧性和局部有限性的不同构造，人们对不分明仿紧性做了许多工作[2]．这由于 F拓扑学具有层次结构，不分明仿紧性的讨论颇为繁杂，因而合理地引入不分明仿紧性很值得人们重视．

F拓扑学中以有限覆盖作为紧性定义有很多弊病 (如不存在 T_1的紧空间)．因此，应明生[3]利用包含度区分层次提出了覆盖式紧性，文 [4]讨论了其主要性质．本文利用包含度讨论了覆盖式不分明仿紧性 (记 f仿紧性)，是对文 [3] f紧性的推广．特别地，在弱诱导 F拓扑空间中，f仿紧与文 [2]中的仿紧性和II 仿紧性等价．以下叙述中采用文 [2, 3]中的一些符号和术语．

定义 1 设 $(X,\mathscr{T})$是 fts. 称 X的不分明子集族 $\mathscr{A}$为局部有限的，若任意 $x\in X$，存在 $U\in\mathscr{T}$和有限 $\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$使 $U(x)>0$且任意 $y\in X$和任意 $A\in\mathscr{A}\setminus\mathscr{A}_0$时，$A(y)\wedge\cup(y)=0$.

此定义条件较强，但下面定义的 f仿紧性与前人工作等价 (本文定理)．

称 $\mathscr{A}$是 σ局部有限的，若有至多可列个局部有限族 $\{\mathscr{A}_i\}_{i\in N}$使 $\mathbf{A}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{A}_i$.

定义 2 设 $(X,\mathscr{T})$是 fts. 称 X的不分明子集 A是 f仿紧的，若对任意 $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$有

$$I(A,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\{I(A,\cup\mathscr{B})\mid\text{开集族 }\mathscr{B}<\mathscr{U}\text{且 }\mathscr{B}\text{局部有限}\}$$

其中，$\mathscr{B}<\mathscr{U}$表示任意 $B\in\mathscr{B}$，存在 $A\in\mathscr{U}$，使 $B\subset A$.

定义中 $A=X$时，称 $(X,\mathscr{T})$为 f仿紧空间．显然，f紧集必为 f仿紧集．

命题 1 设 $(X,\mathscr{T})$是弱诱导 fts,则 $(X,\mathscr{T})$是 f仿紧的当且仅当 $(X,[\mathscr{T}])$是仿紧空间，其中 $[\mathscr{T}]$是 $\mathscr{T}$中分明开集的承集之族．

证明 充分性．设 $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$，$I(X,\cup\mathscr{U})>t$，则任意 $x\in X$，有 $B_x\in\mathscr{U}$且 $\mathscr{B}(x)>t$. 因为 $(X,\mathscr{T})$是弱诱导的，所以 $[\mathscr{T}]=l(\mathscr{T})$，因而 $\{l_t(B_x)\}_{x\in X}\subset[\mathscr{T}]$且构成 $(X,[\mathscr{T}])$的开覆盖．又因为 $(X,[\mathscr{T}])$是仿紧的，所以存在 $[\mathscr{T}]$中的 $\mathscr{B}<\{l_t(B_x)\}_{x\in X}$，$\cup\mathscr{B}=X$且 $\mathscr{B}$

* 收稿日期: 1998-03-13 邱道文，男，31岁，讲师

局部有限. 因此 $A\in\mathscr{B}$ 时有 $x(A)\in X$, 使 $A\subset l_t(B_{x(A)})$. 令 $\mathscr{B}'=\{B_{x(A)}\cap i_A\mid A\in\mathscr{B}\}$, 则易见 $\mathscr{B}'<\mathscr{U}$ 且 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{T}$. 往证 $\mathscr{B}'$ 满足:

1) $\mathscr{B}'$ 局部有限.

因为 $\mathscr{B}$ 局部有限, 所以 $y\in X$ 时, 有 $x\in V_x\in[\mathscr{T}]$ 使 $V_y\cap A=\varnothing$, 任意 $A\in\mathscr{B}\setminus\mathscr{B}_y$. 其中, $\mathscr{B}_y$ 为 $\mathscr{B}$ 的某有限子集. 故 $(B_{x(A)}\cap i_A\cap i_{V_y})(z)=0$, 任意 $z\in X$ 和 $A\in\mathscr{B}\setminus\mathscr{B}_y$.

2) $I(X,\cup\mathscr{B}')>t$ (1)

事实上, $z\in X$ 时, 有 $A_z\in\mathscr{B}$ 使 $z\in A_z$. 又, $A_z\subset l_t(B_{x(A_z)})$, 因此

$$(\cup\mathscr{B}')(z)=\sup_{A\in\mathscr{B}}\{B_{x(A)}(z)\wedge i_A(z)\}\geqslant B_{x(A_z)}(z)>t$$

可见 (1) 式成立. 既然 t 是任取的, 因此有

$$I(X,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid\mathscr{B}<\mathscr{U},\mathscr{B}\subset\mathscr{U}\text{且}\mathscr{B}\text{局部有限}\}.$$

必要性. 设 $\mathscr{U}\subset[\mathscr{T}]$ 且 $\cup\mathscr{U}=X$. 因为 $(X,\mathscr{T})$ 是 f 仿紧的, 所以 $\sup\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid\mathscr{B}<\mathscr{U},\mathscr{B}\subset\mathscr{T},\mathscr{B}\text{局部有限}\}\geqslant I(X,\cup\mathscr{U})=1$. 故存在 $\mathscr{T}$ 中局部有限族 $\mathscr{B}<\mathscr{U}$ 满足 $I(X,\cup\mathscr{B})>\lambda$, $\lambda\in[0,1)$. 因而 $x\in X$ 时有 $B_x\in\mathscr{B}$, 使 $B_x(x)>\lambda$. 又由 $[\mathscr{T}]=l(\mathscr{T})$ 和 $\mathscr{B}<\mathscr{U}$, 存在 $A_x\in\mathscr{T}$, $s(x)\in[0,1]$, 使 $B_x\subset l_{s(x)}(A_x)\in\mathscr{U}$. 若令 $\mathscr{A}=\{l_\lambda(B_x)\}_{x\in X}$, 则易见 $\mathscr{A}\subset[\mathscr{T}]$ 和 $\cup\mathscr{A}=X$ 且满足: ① $\mathscr{A}<\mathscr{U}$.

因为 $B_x\subset l_{s(x)}(A_x)$, 所以当 $B_x(y)>0$ 时, $y\in l_{s(x)}(A_x)$, 因此 $l_\lambda(B_x)\subset l_{s(x)}(A_x)\in\mathscr{U}$.

② $\mathscr{A}$ 是局部有限的. 事实上, 对任意 $y\in X$, 由于 $\mathscr{B}$ 局部有限, 故存在 $V_y\in\mathscr{T}$, $V_y(y)>0$ 使得仅有有限个 $B\in\mathscr{B}$ 满足 $\sup\{B(z)\wedge V_y(z)\mid z\in X\}>0$. 断言 $l_\lambda(V_y)$ 与 $\mathscr{A}$ 只有有限个交非空. 否则, 若 $l_\lambda(V_y)\cap l_\lambda(B_x)\neq\varnothing$ 的 $l_\lambda(B_x)$ 有无限个, 则有无限个 $B_x\in\mathscr{B}$ 使得

$\sup\{(V_y\cap B_x)(z)>0\mid z\in X\}>0$, 矛盾. 至此, 命题证毕.

推论1 设 $(X,\mathscr{T})$ 是分明拓扑空间, 则 $(X,\mathscr{T})$ 是仿紧的当且仅当 $(X,\mathrm{k}(\mathscr{T}))$ 是 f 仿紧的 (仿紧的或 II 仿紧的[1]).

证明 已知 $(X,\mathrm{k}(\mathscr{T}))$ 是弱诱导空间且 $[\mathrm{k}(\mathscr{T})]=\mathscr{T}$, 由命题1可知结论成立.

为了得到等价刻画定理, 先证明几个引理.

引理1 设 $(X,\mathscr{T})$ 是弱诱导 fts, $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$ 且 $\mathscr{U}$ 是 σ-局部有限的, 则

$$I(X,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid\mathscr{B}<\mathscr{U},\mathscr{B}\text{局部有限}\}$$

证明 设 $\mathscr{U}=\bigcup_{i\in\mathbf{N}}\mathscr{U}_i$, $\mathscr{U}_i$ 是局部有限的, $i\in\mathbf{N}$. 因为 $I(X,\cup\bigcup_{i\in\mathbf{N}}\mathscr{U}_i)=\inf_{x\in X}\sup_{i\in\mathbf{N}}\sup_{A\in\mathscr{U}_i}A(x)$, 所以不妨设 $i\neq j$ 时, $\mathscr{U}_i\cap\mathscr{U}_j=\varnothing$. 现设 $I(X,\cup\mathscr{U})>t$, 则任意 $x\in X$ 存在 $A_x\in\mathscr{U}$, $A_x(x)>t$. 所以 $\{l_t(A_x)\}_{x\in X}$ 覆盖 X, 且是 $(X,[\mathscr{T}])$ 的 σ-局部有限族.

由一般拓扑学性质[2], 存在 $(X,[\mathscr{T}])$ 中的局部有限族 $\mathscr{A}<\{l_t(A_x)\}_{x\in X}$ 且 $\cup\mathscr{A}=X$. 因此, $B\in\mathscr{A}$ 时, 有 $x(B)\in X$ 使 $B\subset l_t(A_{x(B)})$.

令 $\mathscr{B}=\{i_B\cap A_{x(B)}\mid B\in\mathscr{A}\}$, 则易见 $\mathscr{B}<\mathscr{U}$. 又因为 $\cup\mathscr{A}=X$, 所以 $y\in X$ 时, 有 $B\in\mathscr{A}$, $y\in B$ 且 $A_{x(B)}(y)>t$. 因此, $I(X,\cup\mathscr{B})>t$.

引理2 设 $(X,\mathscr{T})$ 是弱诱导包含式正则空间[1], 若满足: 任意开集族 $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$, 有

$$I(X,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid\mathscr{B}<\mathscr{U}\text{且}\mathscr{B}\text{局部有限}\}\qquad(2)$$

则对任意 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{T}$ 有

$$I(X,\cup\mathscr{U}')\leqslant\sup\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid\text{闭集族}\mathscr{B}<\mathscr{U}',\mathscr{B}\text{局部有限}\}\qquad(3)$$

证明 由(2)式, 类似于引理1的证明, 可知对 $(X,[\mathscr{T}])$ 而言, (2) 式也满足, 即任意

$\mathscr{U}\subset[\mathscr{T}]$, 若 $X=\cup\mathscr{U}$, 则存在 $(X,[\mathscr{T}])$中局部有限分明子集族 $\mathscr{B}<\mathscr{U}$且 $\cup\mathscr{B}=X$.

设 $I(X,\cup\mathscr{U}')>t\in(0,1)$, $\mathscr{U}'\subset\mathscr{T}$, 则 $x\in X$时, 有 $U_x\in\mathscr{U}'$使 $U_x(x)>t$. 又因为 $(X,\mathscr{T})$是正则空间, 所以有 $V_x\in\mathscr{T}$使 $V_x(x)\geqslant t$且 $\overline{V}_x\in U_x$. 任取 $\lambda>0$使 $t-\lambda>0$, 则 $\left\{l_{t-\lambda}(V_x)\right\}\subset\mathscr{T}$可覆盖 X, 据已知知 $(X,[\mathscr{T}])$是正则空间, 故存在 $(X,[\mathscr{T}])$中闭集族 $\mathscr{A}<\left\{l_{t-\lambda}(V_x)\right\}_{x\in X}$, $\cup\mathscr{A}=X$, 且 $\mathscr{A}$局部有限.

令 $\mathscr{B}=\left\{x_A\cap\overline{V}_{x(A)}\mid A\in\mathscr{A},\ A\subset l_{t-\lambda}V_{x(A)}\right\}$, 则易知 $\mathscr{B}$是 $\mathscr{T}$中的闭集族且 $\mathscr{B}<\mathscr{U}'$. 又由 $\mathscr{A}$的局部有限性即知 $\mathscr{B}$也局部有限. 往证 $I(X,\cup\mathscr{B})>t-\lambda$. 因为 $y\in X$时, 有 $A\in\mathscr{A}$, $y\in A$, 而 $A\subset l_{t-\lambda}(V_{x(A)})$, 所以 $V_{x(A)}(y)>t-\lambda$. 因此 $I(X,\cup\mathscr{B})=\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{E\in\mathscr{B}}E(x)\geqslant t-\lambda$.

既然 λ是任意的, 可见 (3) 成立.

引理 3 设 $(X,\mathscr{T})$是弱诱导 fts, 若对任意 $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$, 都有 $I(X,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\left\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid 闭集族\ \mathscr{B}<\mathscr{U}且\ \mathscr{B}局部有限\right\}$. 则 $(X,[\mathscr{T}])$是仿紧的.

定理 设 $(X,\mathscr{T})$是弱诱导包含式正则空间, 则以下各条等价: ① $(X,\mathscr{T})$是 f仿紧空间; ② 任意 $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$, 有 $I(X,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\left\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid 开集族\ \mathscr{B}<\mathscr{U}且\ \mathscr{B}是\ e\text{-}局部有限的\right\}$; ③ 任意 $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$, 有 $I(X,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\left\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid\mathscr{B}<\mathscr{U}, \mathscr{B}局部有限\right\}$; ④ 任意 $\mathscr{U}\subset\mathscr{T}$, 有 $I(X,\cup\mathscr{U})\leqslant\sup\left\{I(X,\cup\mathscr{B})\mid 闭集族\ \mathscr{B}<\mathscr{U}且\ \mathscr{B}局部有限\right\}$; ⑤ $(X,[\mathscr{T}])$是仿紧的.

证明 ①⇒②, 显然; ②⇒③, 由引理 1知; ③⇒④, 由引理 2知; ④⇒⑤, 由引理 3知; ⑤⇒① 由命题 1知.

注 在 fts中, 文 [1] 中关于此类空间的仿紧性和Ⅱ 仿紧性及其所有等价刻画 ([1] 中定理 7.2.13和定理 7.3.16) 皆与本文定理各条等价.

参 考 文 献

1 Kelley J L. 一般拓扑学. 吴从炘等译. 北京: 科学出版社, 1982. 143~149

2 王国俊. L-f拓扑空间论. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988. 182~345

3 应明生. 不分明拓扑中的一种覆盖式紧性. 数学学报, 1994, 37 (6): 852~856

4 邱道文. 关于覆盖式不分明紧性. 中山大学学报 (自然科学版), 1998, 37 (3): 31~34

Fuzzy Paracompactness of Covering Style

*Qiu Daowen** *Ma Jianlan*

Abstract The inclusion degree is used to propose a fuzzy paracompactness of covering style, which is shown to be a good generalization. Moreover, it is equivalent to several kinds of fuzzy paracompactness previously given. Several lemmas ralated closely to locally finite property are established and the main result follows them. A complete equivalence theorem is obtained.

Keywords fuzzy topology, paracompactness, weakly induced space, locally finite property

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China