

一类非损耗系统的惯性流形^{*}

黄 煜

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 对一类非损耗系统分别给出存在唯一的 (无界) 最大吸引子, 存在惯性流形及不存在周期轨道的充分条件, 并给出两个应用例子.

关键词 最大不变集, 最大吸引子, 惯性流形, 动力系统

分类号 O 175. 15

全局吸引子及惯性流形是无穷维动力系统的两个中心概念. 近十多年来, 人们已就大量的实际系统 (特别是由偏微分方程所描述的系统) 对这中心问题进行了广泛研究^[1~3]. 这些工作都是仅限于损耗系统, 即它们都存在紧的全局吸引子. 这要求系统的解当 $t \rightarrow \infty$ 时是有界的. 因而对于当 $t \rightarrow \infty$ 时存在无界解的系统一定不存在有界吸引子. 为了研究这类系统的动态表现, 最近, Cheykhov 与 Goritskii 首先引入 (无界) 最大吸引子的概念. 它是紧致全局吸引子概念的推广. 但两者有很大区别: 系统若存在紧致全局吸引子, 则唯一, 而对 (无界) 最大吸引子, 则可能不唯一, 致使对它的研究更加困难. Cheykhov 等只能就一类由偏微分方程描述的系统在很强的条件下证明其最大吸引子的存在唯一性, 并证明最大吸引子等于系统所有过去有界的完全轨道的并 (记为 $\mathcal{T}$) 所成集合^[4~6].

本文讨论同一类型系统, 在相对较易验证的条件下, 证明 $\mathcal{T}$ 是系统的一个惯性流形, 并得到系统不存在周期轨道的一个充分条件.

1 定义、基本假设及主要结果

设 $(E, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, $\{S_t\}_{t \geq 0}$ 为 E 上一非线性 C^0 半群. $X, Y \subset E$, 定义

$$\text{dist}(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|$$

E 中连续曲线 $r(s), s \in \mathbb{R}$ 称为半群 $\{S_t\}$ 的完全轨道, 如果对所有 $t \geq 0, s \in \mathbb{R}$ 都成立 $S_t(r(s)) = r(t+s)$. 注意, 对于半群, 不一定都存在完全轨道. 即使存在, 也不一定唯一. 完全轨道 $r(s)$ 称为过去有界的. 如果集合 $\{r(s), s \leq 0\}$ 在 E 中有界.

定义 1 $A \subset E$ 称为 $\{S_t\}$ 的不变集, 如果 $S_t(A) = A, \forall t \geq 0$; A 称为 $\{S_t\}$ 的最大不变集, 如果是 $\{S_t\}$ 的不变集且 A 包含所有 $\{S_t\}$ 的有界不变集.

记 $\mathcal{T} = \{r(0) | r(s) \text{ 是过去有界的完全轨道}\}$. 容易验证, $\mathcal{T}$ 为 $\{S_t\}$ 的一个最大不变集.

* 广东省自然科学基金 (95046) 及中山大学高等学术研究中心基金 (96M3) 资助项目

收稿日期: 1996-09-25 黄煜 男, 34 岁, 副教授

定义 2 E 中的闭集 $\mathcal{U}$ 称为 $\{S_t\}$ 的最大吸引子, 如果: ① $\mathcal{U}$ 为不变集; ② $\mathcal{U}$ 吸引 E 中任一有界集, 即 $\forall B \subset E$,

$$\text{dist}(S_t(B), \mathcal{U}) \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow \infty \text{ 时}.$$

且 U 中无真子集也满足①及②.

定义 3 E 中有限维流形 $\mathcal{M}$ 称为 $\{S_t\}$ 的一个惯性流形, 如果: ① $\mathcal{M}$ 为 Lipschitz 的; ② $\mathcal{M}$ 为不变的; ③ $\mathcal{M}$ 指数地吸引所有正半轨道, 即存在 $\nu > 0$, 使得 $\forall u_0 \in E$, 存在 $\bar{u}_0 \in \mathcal{M}$ 满足 $\forall t \geq 0, \|S_t(u_0) - S_t(\bar{u}_0)\| \leq C(\|u_0\|)e^{-\nu t}$.

其中 $C(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 有界.

易证 $\mathcal{U}$ 及 $\mathcal{M}$ 都是最大不变集. 一般而言, 最大不变集 $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ 及 $\mathcal{M}$ 可能是不同的. 文献 [6] 就一类发展方程给出了 $\mathcal{U} = \mathcal{T}$ 的一个充分条件. 本文将就同一类方程给出 $\mathcal{U} = \mathcal{T} = \mathcal{M}$ 的一个充分条件.

现考虑由发展方程所产生的半群.

设 H 为 Hilbert 空间, 内积记为 $(\cdot, \cdot)$, 在 H 中考虑抽象微分方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + F(y(t)) \\ y(0) = y_0 \in H \end{cases} \quad (1)$$

其中, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ 为线性算子; $F: H \rightarrow H$ 为非线性算子, 且满足以下基本假设:

1) (1) 在 H 上生成 C° 半群 $\{S_t\}_{t \geq 0}$, 且它对二变元 (y_0, t) , $y_0 \in H, t \geq 0$ 是连续的.

2) 对 (1) 的任一解 $y(t)$, 实值函数 $\|y(t)\|^2 = (y(t), y(t))$ 是绝对连续的且

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = 2\left(\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right)$$

3) 线性算子 A 的谱 σ 不与虚轴相交. 记 $\mathfrak{e}_+ = \bigcap \{\text{Re} \lambda > 0\}$, $\mathfrak{e}_- = \bigcap \{\text{Re} \lambda < 0\}$, 则 $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_+ \cup \mathfrak{e}_-$, 并记 E_+ 及 E_- 为 A 分别对应于谱集 $\mathfrak{e}_+$ 及 $\mathfrak{e}_-$ 的不变子空间. $H = E_+ \oplus E_-$, $E_- = E_+^\perp$, $\dim E_+ < +\infty$, $A|_{E_+}$ 为有界线性算子且存在常数 $\kappa > 0$ 满足

$$\forall p \in E_+, (Ap, p) \geq \kappa \|p\|^2 \quad (2)$$

$$\forall q \in E_-, (Aq, q) \leq -\kappa \|q\|^2 \quad (3)$$

4) 非线性算子 F 满足全局 Lipschitz 条件, 即存在常数 $X > 0$, 使得对任意 $y, z \in H$.

$$\|F(y) - F(z)\| \leq X \|y - z\| \quad (4)$$

定理 1 在基本假设 1)~4) 下, 此外, 还假设 $F(0) = 0$ 且 $X < \kappa$, 则 $\{S_t\}$ 在 H 中存在惯性流形 $\mathcal{M}$ 且 $\mathcal{M} = \mathcal{T} = \mathcal{U}$.

注 1, 假设 1)~3) 成立, 4) 换成

4)' F 是全局有界且当 $\|p\| \rightarrow +\infty$ 时 $F(p+q) \rightarrow 0$ 对 $q \in E_-$ 中有界集一致成立.

在 1)~3) 及 4)' 的假设下, 此外, 还假设 $\{S_t\}$ 是渐近紧的^[6]. 文 [6] 中证明了 $\mathcal{U} = \mathcal{T}$.

推论 1 在定理 1 的假设下, (1) 仅有唯一的稳定点且没有周期点.

2 主要结果的证明

在此把定理 1 的证明分为若干个引理来证.

引理 1 $\{S_t\}$ 的任一最大吸引子都包含 $\mathcal{T}$, 即 $\mathcal{U} \supset \mathcal{T}$.

引理 2 $\{S_t\}$ 的任一惯性流形 $\mathcal{M}$ 都包含 $\mathcal{T}$.

引理 1 及 2 利用 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{M}$ 的吸引性及闭性可得.

引理 3 对任意 $y_0, y'_0 \in H$, 当 $\kappa \in \{\alpha_0, \alpha_0^{-1}\}$, $Z = \kappa - X$ 或当 $\alpha = 1$, $Z = X - \kappa$ 时

$$V^a(S_t(y_0) - S_t(y'_0)) \leq V^a(y_0 - y'_0) e^{-2Zt}, \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

其中, 对 $\alpha > 0$, 二次型泛函 $V^a: H \rightarrow R = (-\infty, +\infty)$ 定义为:

$$V^a(y) = (q, q) - \alpha^2(p, p),$$

对 $y = p + q \in H$, $p \in E_+$, $q \in E_-$. $0 < \alpha_0 < 1$ 满足方程

$$\frac{\alpha_0^2 - \alpha_0^{-2}}{2} = \frac{2\kappa - X}{X}$$

κ, X 分别由 (2) 及 (4) 式给出.

证明 记 $y = S_t(y_0) = p + q$, $y' = S_t(y'_0) = p' + q'$, $p, p' \in E_+$, $q, q' \in E_-$. 并记

$$J = (F(p + q) - F(p' + q'), q - q' - \alpha^2(p - p'))$$

由 (1) 得 (省略 t 并记 $\frac{d}{dt}y(t) = \dot{y}$).

$$\dot{q} - \dot{q}' = A_2(q - q') + Q(F(p + q) - F(p' + q'))$$

$$\dot{p} - \dot{p}' = A_1(p - p') + P(F(p + q) - F(p' + q'))$$

其中, $A_2 = QA$, $A_1 = PA$, P, Q 分别为 H 到 E_+ 及 E_- 上的投影算子.

由上两式可得

$$Z \triangleq \frac{1}{2e^{2Zt}} \frac{d}{dt} (e^{2Zt} V^a(y(t) - y'(t))) =$$

$$ZV^a(y - y') + (A_2(q - q'), q - q') - \alpha^2(A_1(p - p'), p - p') + J$$

据基本假设 4) 可推得

$$|J| \leq X \|q - q'\|^2 + X \frac{1 - \alpha^4}{2} \|p - p'\|^2$$

注意到 $A_2q = Aq$, $A_1p = Ap$ 及基本假设 3) 可推得

$$Z \leq -(\kappa - X - Z) \|q - q'\|^2 - (Z\alpha^2 - \kappa\alpha^2 - X \frac{1 - \alpha^4}{2}) \|p - p'\|^2$$

因此, 当 $Z = \kappa - X$, $0 < \alpha < 1$ 满足 $\frac{\alpha^2 - \alpha^{-2}}{2} = \frac{2\kappa - X}{X}$ 时, 或当 $Z = X - \kappa < 0$, $\alpha = 1$ 时, 都有 $Z \leq 0$. 故 (5) 成立. 证毕.

引理 4 对任意 $y_0, y'_0 \in H$ 及 $t > 0$, 存在 $M = M(t) > 0$ 满足

$$\|S_t(y_0) - S_t(y'_0)\| \leq M \|y_0 - y'_0\| \quad (6)$$

证明 记 $y(t) = S_t(y_0)$, $y'(t) = S_t(y'_0)$ 则

$$\begin{cases} \dot{y} - \dot{y}' = A(y - y') + F(y) - F(y') \\ y(0) - y'(0) = y_0 - y'_0 \end{cases}$$

据基本假设 2) 可推得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y - y'\|^2 &= (A(p - p'), p - p') + (A(q - q'), q - q') + \\ &\quad (F(y) - F(y'), y - y') \leq (\|A_1\| + X) \|y - y'\|^2 \end{aligned}$$

其中, $y = p + q$, $y' = p' + q'$, $p, p' \in E_+$, $q, q' \in E_-$, $\|A_1\|$ 表示算子 $A_1 \triangleq A|_{E_+}$ 的范数.

由上式并利用 Gronwall 不等式即得 (6). 证毕.

任给 $\varepsilon \in R$, 定义 H 中的子集

$$W(\Gamma) = \{r(0) | r(\cdot) \text{ 为 } \{S_t\} \text{ 的完全轨道且满足 } \sup_{s \geq 0} e^{\varepsilon s} \|r(s)\| < +\infty\}.$$

易见 $W(T)$ 是 $\{S_t\}$ 的不变集. 且当 $T \leq \infty$ 时

$$W(T) \subset W(0) = \mathcal{T} \subset W(T) \quad (7)$$

引理 5 $\{S_t\}$ 存在惯性流形, 且可表为

$$\mathcal{M} = \{y \in H \mid y = p + h(p), p \in E^+, h: E^+ \rightarrow E^-, \text{ 为全局 Lipschitz 函数}, T = X - \kappa < 0\}$$

其中, $h: E^+ \rightarrow E^-$ 为全局 Lipschitz 函数, $T = X - \kappa < 0$.

证明 由引理 3, 4 并利用文 [7] 中定理 5 可得.

定理 1 的证明. 由引理 5 知, $\{S_t\}$ 存在惯性流形 $\mathcal{M} \subset W(T)$, 且 $T = X - \kappa < 0$. 据 (7) 式 $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$. 另一方面, 据引理 2, $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$. 故 $\mathcal{M} = \mathcal{T}$. 按惯性流形的定义, $\mathcal{M}$ 是不变的且 (指数地) 吸引 H 中任一有界集. 另外, 据引理 1, $\{S_t\}$ 的最大吸引子都包含 $\mathcal{T}$, 故 $\mathcal{M}$ 本身亦是 $\{S_t\}$ 的唯一的最大吸引子. 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{T} = \mathcal{U}$. 证毕.

推论 1 的证明. 假设 (1) 存在异于 0 的稳定点或周期轨道, 则该点或该周期轨道都可看作为 $\{S_t\}$ 的完全轨道 (记为 $r_0(\cdot)$) 且 $r_0(\cdot)$ 过去有界, 所以 $r_0(t) \in \mathcal{T}, \forall t \in \mathbf{R}$. 另一方面, $r_0(t) \notin W(T), \forall t \in \mathbf{R}, T = X - \kappa < 0$, 这与 $\mathcal{M} = W(T) = \mathcal{T}$ 矛盾, 证毕.

3 应用

例 1 考虑半线性抛物型方程

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + \lambda u + f(u) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{t=\infty} = u_0(x) \end{cases} \quad (8)$$

其中, $K \subset \mathbf{R}^n$ 有界, 其边界光滑, $\lambda > 0, u_0(x) \in L^2(K), f \in C^2(K)$, 满足

$$f(0) = 0, |f'(u)| \leq X, \forall u \in \mathbf{R} \quad (9)$$

问题 (8) 的解的存在唯一及连续依赖性可用规范的 Galerkin 方法证明. 故 (8) 在 $L^2(K)$ 上生成 C^0 半群 $\{S_t\}$ 且基本假设 1), 2) 成立.

现构造算子 $\Delta + \lambda$ 的不变子空间, 设 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$, 为算子 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边值条件下的特征值, 则

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots, \lambda_i \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty)$$

并记 $\{e_i(x)\}$ 为其对应的特征函数.

假设存在一正数 N 使得

$$\lambda_N < \lambda < \lambda_{N+1} \quad (10)$$

则算子 $\Delta + \lambda$ 的谱 σ 与虚轴不相交. 按前面的记号有

$$\sigma = \{\lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_N\}, \quad \sigma_c = \{\lambda - \lambda_{N+1}, \lambda - \lambda_{N+2}, \dots\}$$

其中, E_σ 为特征函数 $e_1, \dots, e_N$ 所张成的线性空间故 $\dim E_\sigma < +\infty, E_c = E_\sigma^\perp$. 由于 Δ 为自共轭算子, 故式 (2) (3) 成立, 其中 $\kappa = \min\{\lambda - \lambda_N, \lambda_{N+1} - \lambda\}$. 因此, 基本假设 3) 成立. 定义

$$F: L^2(K) \rightarrow L^2(K), \quad \forall u \in L^2(K), \quad F(u)(x) = f(u(x)).$$

由 (9) 易证 $F: L^2(K) \rightarrow L^2(K)$ 为全局 Lipschitz 算子, 且 $\text{Lip}(F) = X, F(0) = 0$.

由此, 可得下面的定理 2.

定理 2 设 (9), (10) 成立. 若 $X < \kappa$, 则问题 (8) 存在惯性流形 $\mathcal{M}$ 及唯一的最大吸引子 $\mathcal{U}$. 且它们都等于 (8) 的所有过去有界的完全轨道之并. 此外, 此时 (8) 不存在周期轨道.

例 2 带阻滞的半线性双曲型方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda u + f(u) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(K), \quad \partial u|_{t=0} = p|_{t=0} = p \in L_2(K) \end{cases} \quad (11)$$

其中, $f(u) \in C'(\mathbf{R})$ 满足 (9), λ 满足 (10).

取 $H = H_{\text{eq}}^1 \times L_2(K)$ 及

$$y = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \partial u \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta + \lambda & -U \end{pmatrix}, \quad F = F \begin{pmatrix} M \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}$$

则 (11) 可写成抽象形式 (1).

文 [6] 已验证, (11) 满足基本假设 1)~4). 故当 f 的 Lipschitz 常数 X 很小时, (11) 存在唯一的最大吸引子 $\mathcal{U}$ 及惯性流形 $\mathcal{M}$ 且 $\mathcal{U} = \mathcal{M} \cap \mathcal{I}$, 且 (11) 没有周期解.

参 考 文 献

- 1 Temam R. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1988. 1~442
- 2 Hale J K. Asymptotic behaviour of dissipative systems. Mathematical Surveys and Monographs Vol 25, Amer Math Soc. Providence, RI, 1988, 6~160
- 3 Babin A V, Vishik M I. Attractors of evolution equations. Studies in Mathematics and Its Application 25, Amsterdam: North-Holland, 1992. 1~527
- 4 Chepyzhov V V. Unbounded attractors of some parabolic systems of differential equations and estimation of their dimension. Dokl Akad Nauk SSSR, 1989, 301(4): 4~49
- 5 Goritskii A Yu. Unbounded attractors for the hyperbolic equation. Moscow Univ Math Bull, 1988, 44(3): 47~49
- 6 Chepyzhov V V, Goritskii A Yu. Unbounded attractors of evolution equations. Advances in Soviet Math, 1992, 10(1): 85~128
- 7 Romanov A V. Sharp estimates of the dimension of inertial manifolds for nonlinear parabolic equations. Russian Acad Sci Izv Math, 1994, 43(1): 31~47

Inertial Manifolds for a Class of Nondissipative Systems

Huang Yu*

Abstract For a class of nondissipative systems, sufficient conditions for the existence of the unique unbounded maximal attractor and inertial manifolds and the no-existence of periodic orbit are obtained respectively. Two examples are also given.

Keywords the maximal invariant set, the maximal attractor, inertial manifold, dynamical system

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275