第 37卷 第 5期 1998年 9月
中山大学学报 (自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 37 No. 5 Sep. 1998

经济均衡的单纯同伦算法*

黎培兴[1)] 范江华[2)] 王则柯[1)]
(1) 中山大学岭南学院, 广州 510275; 2) 广西师范大学数学系)

摘 要 介绍了单纯同伦算法的经济学应用背景,提出了标准单纯形 S^n 的 J_4渐细剖分,并设计了基于 J_4剖分与整数标号的经济均衡问题的单纯同伦普适算法,其中深入地分析了算法的理论依据和收敛性.

关键词 经济均衡,标准单纯形,渐细单纯剖分,同伦,整数标号算法
分类号 O 241.7

1 经济学背景

考虑不涉及生产的有限纯交换经济模型: m个商家, $M=\{1,2,\cdots,m\}$, $j\in M$,交易 $n+1$种商品 $N_0=\{0,1,2,\cdots,n\}$, $i\in N_0$. 商品空间为 $\mathbf{R}_+^{n+1}$, 这里 $\mathbf{R}_+^{n+1}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n+1}|\ x_i\geqslant 0, i\in N_0\}$. 商品向量记为 $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$, 商家 j 的初始持有商品为 $\boldsymbol{w}^j=(w_0^j, w_1^j,\cdots, w_n^j)\in\mathbf{R}_+^{n+1}$, 这里 w_i^j 表示商家 j 原来持有商品 i 的数量. 在价格 $\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}_+^{n+1}\setminus\{0\}$下, 商家 j 的预算限制集为 $B^j(\boldsymbol{p})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^{n+1}|\ \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}^j, \boldsymbol{x}\leqslant\sum_{j=1}^m\boldsymbol{w}^j\}$. 效用函数 u^j: $\mathbf{R}_+^{n+1}\to\mathbf{R}$表示商家 j 对商品的偏好. 假定 u^j 连续、严格单调、拟凹. 在给定价格 $\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}_+^{n+1}\setminus\{0\}$下, 商家 j 的需求 $\boldsymbol{d}^j(\boldsymbol{p})$由其最大化偏好与预算限制集所决定, 即:

$$\max\ u^j(\boldsymbol{x})\quad \text{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in B^j(\boldsymbol{p}).$$

其经济学意义是: 交易的各方在其预算限制集上实现其效用的最大化.

这样, 价格 $\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}_+^{n+1}\setminus\{0\}$给定后, $\boldsymbol{d}^j(\boldsymbol{p})$唯一决定并且关于 $\boldsymbol{p}$连续, 由 u^j 的严格单调性可知, $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^j(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}^j$, 从而对每一 $\lambda>0$有 $\boldsymbol{d}^j(\lambda\boldsymbol{p})=\boldsymbol{d}^j(\boldsymbol{p})$. 令 $\boldsymbol{d}(p)=\sum_{j=1}^m\boldsymbol{d}^j(\boldsymbol{x})$和 $\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^m\boldsymbol{w}^j$ 分别表示总需求和总初始持有, 则 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$(Walras律). 其经济学意义是: 纯交换经济中商品的总价值不变.

对价格向量 $\boldsymbol{p}$作规范化处理,使其和为 1,即$\sum_{i=1}^n p_i=1$. 从而价格空间为标准单纯形

$$S^n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n+1}|\sum_{i=1}^n p_i=1, p_i\geqslant 0\}.$$

由 u^j 的严格单调性可知, 对于 $\boldsymbol{p}\in S^n$, 若 $p_i=0$, 则有 $d_i(\boldsymbol{p})\geqslant w_i$. 定义函数 z: $S^n\to\mathbf{R}^{n+1}$为 $z(\boldsymbol{p})=d(\boldsymbol{p})-\boldsymbol{w}$,称之为标准单纯形 S^n 上的超需函数. 如果 $\boldsymbol{p}^*\in S^n$ 使得 $z(\boldsymbol{p}^*)\leqslant 0$, 称 $\boldsymbol{p}^*$

* 国家自然科学基金 (79790130) 资助项目
收稿日期: 1998-03-12 黎培兴, 男, 27岁, 博士研究生

为均衡价格.

一般经济均衡定理: 若 $z: S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ 连续, 对所有的 $\boldsymbol{p} \in S^n$ 都有 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} z(\boldsymbol{p}) = 0$, 则存在 $\boldsymbol{p}^* \in S^n$ 使得 $z(\boldsymbol{p}^*) \leqslant 0$. 定理的意义是: 有限纯交换经济存在均衡价格 $\boldsymbol{p}^*$.

取定 $\lambda > 0$, 定义 $f: S^n \to S^n$ 为

$$f(\boldsymbol{p}) = \frac{\{\max\{0, p_0 + \lambda z_0(\boldsymbol{p})\}, \cdots, \max\{0, p_n + \lambda z_n(\boldsymbol{p})\}\}}{\sum_{j \in N_0} \max\{0, p_j + \lambda z_j(\boldsymbol{p})\}}$$

则 f 的 Brouwer不动点就是均衡价格 $\boldsymbol{p}^*$ [1,2].

因此, 欲计算均衡价格, 只需计算连续自映射 $f: S^n \to S^n$ 的不动点. 本文将给出基于 J_4 剖分的计算 $f: S^n \to S^n$ 不动点的整数标号单纯同伦算法.

2　标准单纯形的 J_4 渐细剖分

我们知道, J_3 是 $[0, 1] \times \mathbf{R}^n$ 的渐细单纯剖分 [1,3], 它在 $[0, 1] \times C^n$ 的局限就是 $[0, 1] \times C^n$ 的渐细单纯剖分, 这里 $C^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n: 1 \geqslant x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0\}$.

将 $[0, 1] \times C^n$ 的渐细剖分引入 $[0, 1] \times S^n$. 注意到, $[0, 1] \times S^n$ 是嵌到 $[0, 1] \times \mathbf{R}^{n+1}$ 的, 约定后者的标架向量为 $\boldsymbol{e}^{-1} = (1, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{e}^0 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}^n = (0, 0, \cdots, 1)$, 而 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的标架向量是 $\boldsymbol{u}^0 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{u}^1 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}^n = (0, 0, \cdots, 1)$.

记 $N_0 = \{0, 1, \cdots, n\}$,　$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

为 $(n+2) \times (n+1)$ 矩阵, 记 $\boldsymbol{Q}$ 的第 i 列为 $\boldsymbol{q}^i$, $i \in N_0$.

定义 1　确定剖分的中心顶点集: $J_4^c = \{(t, \boldsymbol{x}) \in [0, 1] \times S^n \subset [0, 1] \times \mathbf{R}^{n+1} \mid t = 2^{-k}, k \in \mathbf{Z}_+; x_i / t \in 2\mathbf{Z}, i = 1, 2, \cdots, n-1; x_n / t \in \mathbf{Z} \backslash 2\mathbf{Z}; x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\}$

这里, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 从而 $\mathbf{Z} \backslash 2\mathbf{Z}$ 为奇数集, 而 $\mathbf{Z}_+$ 是正整数集. 确定对应 $\boldsymbol{v}: J_4^c \to \{-1, 1\}^{n+1}$ 如下: 设 $\boldsymbol{y} = (t, \boldsymbol{x}) \in J_4^c$, 取 $v_0(\boldsymbol{y}) = -1$, 而 $i = 1, 2, \cdots, n$, 则有

$$v_i(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} -1, & (x_i + \cdots + x_n) / t = 1 \mod 4 \\ 1, & (x_i + \cdots + x_n) / t = 3 \mod 4 \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{y} = (t, \boldsymbol{x}) \in J_4^c$, π 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的一个置换, $\pi(j) = 0$, $\boldsymbol{s} \in \{-1, 1\}^n$ 是一个 n 维符号向量, 这时 $\boldsymbol{y}, \pi, \boldsymbol{s}$ 按以下方式唯一确定 $n+1$ 维单纯形 $\sigma = \langle \boldsymbol{y}^{-1}, \boldsymbol{y}^0, \cdots, \boldsymbol{y}^n \rangle$: 首先, 由 $\boldsymbol{y}, \pi, \boldsymbol{s}$ 按照

$$a_{\pi(i)} = \begin{cases} s_{\pi(i)} & (0 \leqslant i < j = \pi^{-1}(0)) \\ v_{\pi(i)}(\boldsymbol{y}) & (j \leqslant i \leqslant n) \end{cases}$$

得到符号向量 $\boldsymbol{a} \in \{-1, 1\}^n$, 然后, 按照 $\boldsymbol{y}^{-1} = \boldsymbol{y}$ 而

$$\boldsymbol{y}^i = \begin{cases} \boldsymbol{y}^{i-1} + t a_{\pi(i)} \boldsymbol{q}^{\pi(i)} & (0 \leqslant i < j) \\ \boldsymbol{y}^{i-1} - t \sum_{l=j}^{n} a_{\pi(l)} \boldsymbol{q}^{\pi(l)} & (i = j) \\ \boldsymbol{y}^{i-1} + 2t a_{\pi(i)} \boldsymbol{q}^{\pi(i)} & (j < i \leqslant n) \end{cases}$$

递推地确定 $\boldsymbol{y}^{-1}$, $\boldsymbol{y}^0$, $\cdots$, $\boldsymbol{y}^n$, 得到单纯形 $\sigma = \langle \boldsymbol{y}^{-1}, \boldsymbol{y}^0, \cdots, \boldsymbol{y}^n \rangle$. 当 $\sigma \subset [0, 1] \times S^n$ 时, 把它记作 $j_4(\boldsymbol{y}, \pi, \boldsymbol{a})$. 最后, 记所有这样得到的 $j_4(\boldsymbol{y}, \pi, \boldsymbol{a})$ 的集合为 J_4.

定理 1　J_4 是 $[0, 1] \times S^n$ 的渐细单纯剖分, 其单纯形的直径随参数 t 趋于 0而一致地趋

于 0. 设 $j_4(\boldsymbol{y}, \text{c}, \boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{y}^{-1}, \boldsymbol{y}^{0}, \cdots, \boldsymbol{y}^{n}\rangle \in J^4$, 则由 $j_4(\boldsymbol{y}, \text{c}, \boldsymbol{a})$经去掉顶点 y^i 的转轴运算所到达的单纯形，即 J_4 中另一以$\langle \boldsymbol{y}^{-1}, \boldsymbol{y}^{0}, \cdots, \boldsymbol{y}^{i-1}, \boldsymbol{y}^{i+1}, \cdots, \boldsymbol{y}^{n}\rangle$为界面的单纯形 $j_4(\boldsymbol{z}, \rho, \boldsymbol{b})$，可由下面的转轴运算规则表唯一地决定:

	$\boldsymbol{z}$	ρ	$\boldsymbol{b}$
$i = -1, j = 0$	$\boldsymbol{y} - t\boldsymbol{a}$	$(\text{c}(1), \cdots, \text{c}(n), \text{c}(0))$	$\boldsymbol{a}$
$i = -1, j \neq 0$	$\boldsymbol{y} + 2ta_{\text{c}(i)}\boldsymbol{q}^{\text{c}(i)}$	π	$\boldsymbol{a} - 2a_{\text{c}(0)}\boldsymbol{q}^{\text{c}(0)}$
$0 \leqslant i < j - 1$	$\boldsymbol{y}$	$(\text{c}(0), \cdots, \text{c}(i+1), \text{c}(i), \cdots, \text{c}(n))$	$\boldsymbol{a}$
$0 \leqslant i < j - 1$, $a_{\text{c}(i)} = w_{\text{c}(i)}$	$\boldsymbol{y}$	$(\text{c}(0), \cdots, \text{c}(i+1), \text{c}(i), \cdots, \text{c}(n))$	$\boldsymbol{a}$
$0 \leqslant i < j - 1$, $a_{\text{c}(i)} = -w_{\text{c}(i)}$	$\boldsymbol{y}$	$(\text{c}(0), \cdots, \text{c}(i-1), \text{c}(i+1), \text{c}(n), \cdots, \text{c}(i))$	$\boldsymbol{a} - 2a_{\text{c}(0)}\boldsymbol{q}^{\text{c}(0)}$
$j \leqslant i < n$	$\boldsymbol{y}$	$(\text{c}(0), \cdots, \text{c}(i+1), \text{c}(i), \cdots, \text{c}(n))$	$\boldsymbol{a}$
$i = n, j = n$	$\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{a}/2$	$(\text{c}(n), \text{c}(0), \cdots, \text{c}(n-1))$	$\boldsymbol{a}$
$i = n, j < n$	$\boldsymbol{y}$	$(\text{c}(0), \cdots, \text{c}(j-1), \text{c}(n), \text{c}(j), \cdots, \text{c}(n-1))$	$\boldsymbol{a} - 2a_{\text{c}(n)}\boldsymbol{q}^{\text{c}(n)}$

证明 令 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为 $(n+1) \times (n+2)$矩阵，

则
$$\boldsymbol{QP} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

是 $n+2$阶方阵，而 $\boldsymbol{QP} = \boldsymbol{I}$是 $n+1$阶恒等矩阵．可见，由 $h(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{Qy}$，任意 $\boldsymbol{y} \in (0, 1] \times C^n$ 给出的 $h: (0, 1] \times C^n \to (0, 1] \times S^n$ 是一个仿射同胚，其逆由 $g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{Pw}$，任意 $\boldsymbol{w} \in (0, 1] \times S^n$ 给出；这里，$g: (0, 1] \times S^n \to (0, 1] \times C^n$.

至此可知，J_4 是局限在 $(0, 1] \times C^n$ 的 J_3渐细单纯剖分在仿射同胚 $h: (0, 1] \times C^n \to (0, 1] \times S^n$ 下的像．于是定理显然成立．

J_4渐细单纯剖分是 1个 $n+1$维的单纯剖分．值得注意的是，它只用 1个 n维界面（即下面的 f_0)及其低维面就把整个 $\{1\} \times S^n$ 覆盖住了．这对于下面的普适算法，具有重要意义．J_4的顶点集，即 J_4的 0维骨架，如常记作 J_4^0.

3 单纯同伦算法的理论依据、算法与收敛性分析

定义 2 设 X和 Y是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集，$f, g: X \to Y$是连续映射．如果对任意的$(t, \boldsymbol{x}) \in [0, 1] \times X$成立 $H(t, \boldsymbol{x}) = tg(\boldsymbol{x}) + (1 - t)f(\boldsymbol{x}) \in Y$，则称连续映射 $H: [0, 1] \times X \to Y$是 f和 g之间的一个线性同伦．

同伦算法的主要思想是借助同伦 H，从平凡映射 g在$\{1\} \times \mathbf{R}^n$ 的零点集 $\{1\} \times g^{-1}(0)$出发，走到目标映射在$\{0\} \times \mathbf{R}^n$ 的零点集$\{0\} \times f^{-1}(0)$[4].

定义 3 设 S^n 的自映射 $f: S^n \to S^n$ 连续．对于 J_4的每一顶点$(t, \boldsymbol{x}) \in J_4^0$，令

$$l(t, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} \{j \in N_0 \mid x_j = 1\} & (t = 1) \\ \min\{j \in N_0 \mid f_j(\boldsymbol{x}) \leqslant x_j, x_j > 0, f_{j+1}(\boldsymbol{x}) \geqslant x_{j+1}\} & (t = 2^{-k}, k > 0) \end{cases}$$

这里约定 $n+1=0$. 这样得到由映射 f 确定的整数标号法 $l: J_4^0 \to N_0$, 称 $l(\boldsymbol{y})$为顶点 $\boldsymbol{y}$的整数标号. J_4剖分的一个 (n维) 界面称为全标界面, 如果它的 $n+1$个顶点的标号都不相同. J_4剖分的一个单纯形称为全标单纯形, 如果它有一个界面是全标界面.

定义 4　设 S^n 的自映射 $f: S^n \to S^n$ 连续, 称 f 满足合意性要求, 若 $\boldsymbol{x} \in S_j^n$, 则 $f(\boldsymbol{x}) \notin S_j^n$, 这里 $S_j^n = \{\boldsymbol{x} \in S^n | x_j = 0\}, j \in N_0$.

合意性要求是很自然的, 也就是说, 当商品的价格为 0时, 只要商品是 “好品”, 商家的需求一定超过商品的总持有量, 从而该商品供不应求, 其超需量为正.

以下假设 $f: S^n \to S^n$ 是满足合意性要求的连续映射.

引理 1　按上述标号, $f_0 = \langle (1, u^0)^T, (1, u^1)^T, \cdots, (1, u^n)^T \rangle$是 $(0, 1] \times S^n$ 的拓扑边界上的唯一的全标界面.

引理 2　每一全标单纯形恰好只有一对全标界面.

引理 3　f是 $(0, 1] \times S^n$ 的 J_4单纯剖分的 1个全标界面, 当 f位于边界时, f只是 1个单纯形的界面, 而当 f不位于边界时, f恰好是 1对单纯形的公共界面.

下面给出经济均衡的单纯同伦算法.

算法　在 $(0, 1] \times S^n$ 的 J_4渐细单纯剖分中, 有全标界面在 $(0, 1] \times S^n$ 的边界上的唯一的 $n+1$维单纯形为 $e_1 = j_4(\boldsymbol{y}, c, \boldsymbol{a})$, 其中, $\boldsymbol{y} = (1/2, 1/2, 0, \cdots, 0, 1/2)^T$, $c = (0, 1, \cdots, n)$, $\boldsymbol{a} = (-1, -1, \cdots, -1)$, 其在 $(0, 1] \times S^n$ 的边界上的全标界面为 $f_0 = \langle \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{y}^1, \cdots, \boldsymbol{y}^n \rangle$, $l(\boldsymbol{y}^j) = j, j \in N_0$.

步骤 1　令 $e_1 := j_4((1/2, 1/2, 0, \cdots, 0, 1/2)^T, (0, 1, \cdots, n), (-1, -1, \cdots, -1))$, $\boldsymbol{y}^+(1) := (1/2, 1/2, 0, \cdots, 0, 1/2), k := 1$.

步骤 2　计算 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^+(k))$. 当 $\| \boldsymbol{x}^+(k) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^+(k)) \|$ 小于给定值, 停止计算; $\boldsymbol{x}^+(k)$就是所求的数值均衡点. 否则转步骤 3.

步骤 3　计算 $l = l(\boldsymbol{y}^+(k))$. 设 $e_k = j_4(\boldsymbol{y}, c, \boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{y}^{-1}, \boldsymbol{y}^0, \cdots, \boldsymbol{y}^n \rangle$的另一标号为 l的顶点为 $\boldsymbol{y}^- = \boldsymbol{y}^i$, 根据定理 1的转轴运算规则, 得到 $e_{k+1} = j_4(\boldsymbol{z}, d, \boldsymbol{b})$, 记 e_{k+1}的唯一不在 e_k的顶点为 $\boldsymbol{y}^+(k+1)$, 置 $k := k+1$, 重复步骤 2.

也就是说, 从 $(0, 1] \times S^n$ 边界的唯一全标界面 f_0出发, 根据引理 1及引理 3, 得单纯形边界上的唯一全标单纯形 e_1, 由引理 2得 e_1的另一全标界面 f_1, 由引理 3得新的全标单纯形 e_2, 重复以上做法, 得到全标界面和全标单纯形交错的序列:

$$f_0, e_1, f_1, e_2, \cdots, f_{k-1}, e_k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

最后, 我们分析算法的收敛性.

引理 4　按上述方法得到的全标界面和全标单纯形交错的序列

$$f_0, e_1, f_1, e_2, \cdots, f_{k-1}, e_k, \quad k \in \mathbf{N}$$

满足 $f_k \neq f_j$, $j = 0, \cdots, k-1$, $e_{k+1} \neq e_j$, $j = 1, \cdots, k$.

引理 5　按上述方法得到的全标界面和全标单纯形交错的无穷序列: $f_0, e_1, f_1, e_2, \cdots$的网径 $\mathrm{diam}\, f_k$和 $\mathrm{diam}\, e_k$满足 $\lim\limits_{k \to \infty} \mathrm{diam}\, f_k = 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} \mathrm{diam}\, e_k = 0$.

以上引理的证明见文 [1].

定理 2　按上述方法得到的全标界面和全标单纯形交错的无穷序列: $f_0, e_1, f_1, e_2, \cdots$, 有且只有形如 $(0, \boldsymbol{x}^*) \in \{0\} \times S^n$ 的聚点, 而且每一形如 $(0, \boldsymbol{x}^*)$的聚点给出 $f: S^n \to S^n$ 的一个不

动点 $\boldsymbol{x}^*$.

证明　映射 $f: S^n \to S^n$ 连续，S^n 为欧氏空间的紧致子集，故 f 在 S^n 上一致连续，因此，对于任给正数 $\varepsilon > 0$，存在正数 $h \in (0, \varepsilon/(2\sqrt{n+1}))$，使得任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S^n$ 只要满足 $\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \| < h$，都有 $| f_i(x) - f_i(x') | < \varepsilon/(2\sqrt{n+1})$，$i \in N_0$.

根据引理 5，存在 $K \in \mathbf{N}$，使得当 $k > K$ 时，$\operatorname{diam} \tau_k < h$. 设全标界面 $\tau_k = \langle \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{y}^1, \cdots, \boldsymbol{y}^n \rangle$，设 $\boldsymbol{y} = (t, \boldsymbol{x})$ 为 τ_k 中任意一点. 不妨设 $l(\boldsymbol{y}^i) = i$，$i \in N_0$. 由标号法知，任意 $i \in N_0$，都有 $f_i(\boldsymbol{x}^i) \leqslant x_i^i$，这里 $\boldsymbol{y}^i = (t_i, \boldsymbol{x}^i)$，$i \in N_0$. 对于所有的 $i \in N_0$，有

$$f_i(\boldsymbol{x}) - x_i = (f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}^i)) + (f_i(\boldsymbol{x}^i) - x_i^i) + (x_i^i - x_i) < \varepsilon/(2\sqrt{n+1}) + 0 + h < \varepsilon/\sqrt{n+1}$$

同样由标号法知，任意 $i \in N_0$，都有 $f_i(\boldsymbol{x}^{i-1}) \geqslant x_i^{i-1}$，这里约定 $i = 0$ 时 $i - 1 = n$，则

$$f_i(\boldsymbol{x}) - x_i = (f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}^{i-1})) + (f_i(\boldsymbol{x}^{i-1}) - x_i^{i-1}) + (x_i^{i-1} - x_i) > -\varepsilon/(2\sqrt{n+1}) - 0 - h > -\varepsilon/\sqrt{n+1}$$

综合如上，任意 $i \in N_0$ 都有 $| x_i - f_i(\boldsymbol{x}) | < \varepsilon/\sqrt{n+1}$. 从而

$$\| \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) \|^2 \leqslant \sum_{i \in N_0} | x_i - f_i(\boldsymbol{x}) |^2 < (n+1)\varepsilon^2/(n+1) = \varepsilon^2$$

故此，$\| \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) \| < \varepsilon$.

又，$[0,1] \times S^n$ 为紧致集，其无穷序列有聚点，$[0,1] \times S^n$ 的 J_4 剖分的无穷序列 $\tau_0, \sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \cdots$，根据引理 5，无穷序列有且只有形如 $(0, \boldsymbol{x}^*) \in \{0\} \times S^n$ 的聚点，给出 $f: S^n \to S^n$ 的一个不动点 $\boldsymbol{x}^*$.

参　考　文　献

1 王则柯. 单纯不动点算法基础. 广州：中山大学出版社，1986. 16～180

2 史树中. 数学与经济. 长沙：湖南教育出版社，1990. 98

3 Todd M J. The computation of fixed points and applications, Springer Lecture Notes in Econ and Math. Berlin Springer-Verlag, 1976. 1～198

4 王则柯，高堂安. 同伦方法引论. 重庆：重庆出版社，1990. 21～25

Simplicial Homotopy Algorithms of Economic Equilibria

Li Peixing[*]　*Fan Jianghua*　*Wang Zeke*

Abstract　The background of applications of simplicial homotopy algorithms in economics is discussed. A J_4 simplicial refining triangulation subdivision of the unit simplex S^n, and an algorithm based on the J_4 trianglation and an integer labeling to obtain the economic equilibria are given. The theoretic analysis and the convergence of the algorithm are discussed.

Keywords　economic equilibrium, unit simplex, refining simplicial triangulation, homotopy, integer labeling algorithm

[*] Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China