

一族可积晶格孤子方程及其可积辛映射^{*}

朱思铭 施齐焉 张 磊

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 得到一族对应于一类 3×3 矩阵离散谱问题的新的可积晶格孤子方程及其 Hamilton 结构. 方程族的 Lax 对及其伴随 Lax 对的非线性化得到 1 个可积辛映射. 进而导出这族晶格方程的典型系统的解可化为常微分方程组的解和辛映射的简单迭化过程.

关键词 晶格孤子方程, 可积系, Lax 对, 辛映射

分类号 O 175. 24

近年来从孤子族构造有限维可积系统颇受关注. 曹策问等^[1,2]应用非线性方法得到了一些 Liouville 意义下的有限维可积系统^[1~4]. 本文考虑一类 3×3 矩阵离散谱问题, 从中导出一族晶格孤子方程及其 Hamilton 结构. 非线性化这族晶格孤子方程的离散 Lax 对及其伴随 Lax 对, 得到 1 个可积辛映射. 这族晶格方程的典型系统的解可化为常微分方程系统的解和辛映射的简单迭化过程.

1 晶格孤子方程及其 Hamilton 结构

记 $Ef(n) = f(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$, 并且把 $f(n)$ 写作 f , $f(n+1) = E^k f$. 考虑离散 3×3 矩阵谱问题

$$E\psi(\lambda) = U\psi(\lambda), \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b-\lambda & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} j^1(x) \\ j^2(x) \\ j^3(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

这里 a, b, c 是位势, λ 是常谱参数. 谱问题 (1) 的伴随表示方程是

$$(EV)U - UV = 0, \quad V = (V_{ij})_{3 \times 3} \quad (2)$$

这里 $V_{ij} = V_{ij}(B(\lambda), D(\lambda), C(\lambda))$ 是 λ 的 Laurent 展开式

$$\begin{aligned} V_{11} &= E^{-2}C(\lambda) - E^{-2}bB(\lambda) + \lambda E^{-2}B(\lambda) - E^{-1}cD(\lambda), \quad V_{12} = E^{-1}D(\lambda), \quad V_{13} = E^{-2}B(\lambda) - \\ &E^{-1}bD(\lambda) + \lambda E^{-1}D(\lambda), \quad V_{21} = aB(\lambda), \quad V_{22} = C(\lambda), \quad V_{23} = EaD(\lambda) + cB(\lambda), \quad V_{31} = aD(\lambda), \\ &V_{32} = E^{-1}B(\lambda), \quad V_{33} = E^{-1}C(\lambda) - E^{-1}bB(\lambda) + \lambda E^{-1}B(\lambda), \\ B(\lambda) &= \sum_{j=-1}^{\infty} B_j \lambda^{-j}, \quad D(\lambda) = \sum_{j=-1}^{\infty} D_j \lambda^{-j}, \quad C(\lambda) = \sum_{j=-1}^{\infty} C_j \lambda^{-j} \end{aligned}$$

则方程 (2) 等价于如下递推关系

* 国家自然科学基金 (19771089)、国家教委博士点基金和中山大学基金资助项目

收稿日期: 1998-05-11 朱思铭, 男, 59 岁, 教授, 博士生导师

$$\begin{aligned}
 a(1-E^{-2})B_{-1} &= 0, -(E-1)C_{-1} = 0, c(1-E^{-1})B_{-1} + (Ea - aE^{-1})D_{-1} = 0 \\
 a(1-E^{-2})B_j &= a(1-E^{-2})bB_{j-1} + a(1-E^{-1})cD_{j-1} + a(E^{-2}-E)C_{j-1} \\
 -(E-1)C_j &= -b(E-1)C_{j-1} + (cE^{-1}-Ec)B_{j-1} + (aE^{-1}-E^2a)D_{j-1} \\
 c(1-E^{-1})B_j &+ (Ea - aE^{-1})D_j = (aE^{-2}-Ea + bc - cE^{-1}b)B_{j-1} + \\
 &+ (bEa - aE^{-1}b)D_{j-1} + c(E^{-1}-E)C_{j-1}
 \end{aligned} \quad (3)$$

利用上述递推方程可逐次得到

$$\begin{aligned}
 B_{-1} &= 1, D_{-1} = 0, C_{-1} = 0, B_0 = b, D_0 = -1, C_0 = c \\
 B_1 &= b^2 - c - Ec, D_1 = -b - E^{-1}b, C_1 = bc + cE^{-1}b - (E+1)a
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{定义 } C_j = -cD_j - EaA_j - aA_j, G_j = (A_j, B_j, D_j)^T \quad (5)$$

$$\text{从关系 (3) 可得 } KG_{j-1} = JG_j \quad (6)$$

K 和 J 是所谓的 Lenard 算子对, 其中

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{pmatrix} a(E+ E^2 - E^{-1} - E^{-2})a & a(1-E^{-2})b & a(1+E-E^{-1}-E^{-2})c \\ b(E^2-1)a & cE^{-1}-Ec & aE^{-1}-E^2a + b(E-1)c \\ c(E^2+E-1-E^{-1})a & aE^{-2}-Ea + bc - cE^{-1}b & bEa - aE^{-1}b + c(E-E^{-1})c \\ 0 & a(1-E^{-2}) & 0 \end{pmatrix} \\
 J &= \begin{pmatrix} (E^2-1)a & 0 & (E-1)c \\ 0 & c(1-E^{-1}) & Ea - aE^{-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

从 (4) 式知 $G_{-1} = (0, 1, 0)^T$, $G_0 = (0, b, -1)^T$, $G_1 = (1, b^2 - c - Ec, -b - E^{-1}b)^T$.

设 $\psi(\lambda)$ 满足谱问题 (1) 及其辅助问题

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \psi(\lambda) = V^m \psi(\lambda) \quad (7)$$

这里 $V^m = (V_{ij}^{(m)})_{3 \times 3}$, $V_{ij}^{(m)} = V_{ij}(B^{(m)}(\lambda), D^{(m)}(\lambda), C^{(m)}(\lambda))$, $B^{(m)}(\lambda) = \sum_{j=-1}^m B_j \lambda^{m-j}$, $D^{(m)}(\lambda) =$

$= \sum_{j=-1}^m D_j \lambda^{m-j}$, $C^{(m)}(\lambda) = \sum_{j=-1}^m C_j \lambda^{m-j}$. 则问题 (1) 和方程 (7) 之间的相容条件 $\frac{\partial}{\partial t} E \psi(\lambda) =$

$E \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi(\lambda) \right]$ 导出离散零曲率方程 $\left[\frac{\partial}{\partial t} \right] U = (EV^{(m)})U - UV^{(m)}$, 这蕴含了晶格孤子方程

$$\frac{\partial}{\partial t} u = X_{m+1}, u = (a, b, c)^T, m \geq -1 \quad (8)$$

这里 $X_j = JG_j$, $j \geq 0$. 当 $m = -1$ 时, 方程 (8) 是

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \\ c(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(n)(b(n) - b(n-2)) \\ c(n) - c(n+1) \\ c(n)(b(n) - b(n-1)) - a(n+1) + a(n) \end{pmatrix} \quad (9)$$

下面利用迹公式^[6]求晶格孤子方程 (8) 的 Hamilton 结构. 利用迹公式可计算得

$$\left[\frac{W}{W_a}, \frac{W}{W_b}, \frac{W}{W_c} \right] (-B(\lambda)) = \left[\lambda^X \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \lambda^{-X} \right] \left[\frac{E^{-2}(\lambda - b)B(\lambda) + E^{-2}C(\lambda) - E^{-1}cD(\lambda)}{a}, B(\lambda), D(\lambda) \right]$$

这里 X 是待定常数. 比较上式两边的 λ^{-j-1} 的系数, 得 $X = -2$. 注意关系 (3) 的第 2 式, 有

$$\left[\frac{W}{W_a}, \frac{W}{W_b}, \frac{W}{W_c} \right] H_j = G_j^T, H_j = \frac{B_{j+1}}{j+2}, j \geq -1, \text{ 因此方程 (8) 的 Hamilton 形式是}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u = J \left[\frac{W}{W_a}, \frac{W}{W_b}, \frac{W}{W_c} \right]^T H_{m+1}, m \geq -1 \quad (10)$$

2 1 个辛映射

考虑方程 (1) 的伴随谱问题

$$E\phi(\lambda) = (U^{-1})^T \phi(\lambda), \phi(\lambda) = (O(\lambda), \bar{O}(\lambda), \bar{O}(\lambda))^T \quad (11)$$

对 N 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, 与方程 (1) 和 (11) 相联系的系统可写为

$$E(q^1, q^2, q^3) = (q^1, q^2, q^3) U(u, \lambda_j)^T, E(p^1, p^2, p^3) = (p^1, p^2, p^3) U(u, \lambda_j)^{-1} \quad (12)$$

这里 $q^i = q^i(\lambda_j)$, $p^i = p^i(\lambda_j)$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq N$. 特征值 λ_j 关于位势 (a, b, c) 的泛函梯度为

$$\nabla \lambda_j = \left(\frac{\mathbb{W}_j}{\mathbb{W}_a}, \frac{\mathbb{W}_j}{\mathbb{W}_b}, \frac{\mathbb{W}_j}{\mathbb{W}_c} \right)^T = \left(a^{-1} q^1 p^1, a^{-1} q^2 p^1, a^{-1} q^3 p^1 \right)^T$$

直接计算得知这个梯度满足方程 $K \nabla \lambda_j = \lambda_j J \nabla \lambda_j$ (13)

考虑 Bargmann 约束 $G_0 = \sum_{j=1}^N \nabla \lambda_j$ (14)

由此可得 $a = -\langle q^3, p^1 \rangle$, $b = -\langle q^3, p^1 \rangle^{-1} \langle q^2, p^1 \rangle$, 及 $\langle q^1, p^1 \rangle = 0$. 又由 $E\langle q^1, p^1 \rangle = 0$, 得 $c = -\langle q^3, p^3 \rangle$. 这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的标准内积, $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, $q^i = (q^1, \dots, q^N)^T$, $p^i = (p^1, \dots, p^N)^T$, $1 \leq i \leq 3$. 把上面 a, b, c 代入 (12) 式得到离散 Bargmann 系统

$$\begin{aligned} E q^1 &= q^3, E q^2 = -\langle q^3, p^1 \rangle q^1 - (\langle q^3, p^1 \rangle^{-1} \langle q^2, p^1 \rangle + \lambda) q^2 - \langle q^3, p^3 \rangle q^3 \\ E q^3 &= q^2, E p^1 = -\langle q^3, q^1 \rangle^{-1} \langle q^3, p^3 \rangle p^1 + p^3, E p^2 = -\langle q^3, p^1 \rangle^{-1} p^1, \\ E p^3 &= -\langle q^3, p^1 \rangle^{-1} (\Delta + \langle q^3, p^1 \rangle^{-1} \langle q^2, p^1 \rangle) p^1 + p^2 \end{aligned} \quad (15)$$

直接计算可知 $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 d(E q^i) \wedge d(E p^i) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 d q^i \wedge d p^i$

因此方程 (15) 决定了 1 个辛映射 H

$$E(q^1, q^2, q^3, p^1, p^2, p^3) = H(q^1, q^2, q^3, p^1, p^2, p^3) \quad (16)$$

3 辛映射的可积性

考虑方程 (7) 的伴随方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial q} \right] \phi(\lambda) = -V^{(m)T} \phi(\lambda) \quad (15)$$

方程 (17) 与 (11) 构成晶格孤子方程 (8) 的另一零曲率表示. 事实上可直接推出 $\frac{\partial}{\partial t} U = (E V^{(m)}) U - U V^{(m)}$. 当且仅当 $\frac{\partial}{\partial t} (U^{-1})^T = - (E V^{(m)})^T (U^{-1})^T + (U^{-1})^T V^{(m)T}$.

下面考虑方程 (7) 和 (17) 的非线性化. 由方程 (6), (13), (14) 有 $G_i = \sum_{k=1}^N \lambda_k^i \nabla \lambda_k$, 这是方程 (6) 的特解, 等价于 $A_i = a^{-1} \langle \Delta^i q^1, p^1 \rangle$, $B_i = a^{-1} \langle \Delta^i q^2, p^1 \rangle$, $D_i = a^{-1} \langle \Delta^i q^3, p^1 \rangle$, $j \geq 0$, 把它们代入 (5) 式得 $C_j = \langle \Delta^j q^2, p^2 \rangle$. 把 A_j, B_j, D_j, F_j 代入与 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 相联系的 N 个式 (7) 和式 (17), 得到有限维 Hamilton 系统

$$\frac{\partial}{\partial q} q^i = \frac{\partial F_m}{\partial p^i}, \frac{\partial}{\partial q} p^i = -\frac{\partial F_m}{\partial q^i}, m \geq -1, 1 \leq i \leq 3 \quad (18)$$

其中 Hamilton 函数 F_m 由以下方程确定

$$\begin{aligned} F_{-1} &= \langle \Delta q^1, p^1 \rangle + \langle \Delta q^3, p^3 \rangle + \langle q^3, p^1 \rangle + \langle q^2, p^3 \rangle - \langle q^3, p^3 \rangle \langle q^3, p^2 \rangle, \\ \left(\frac{\partial F_m}{\partial p^1}, \frac{\partial F_m}{\partial p^2}, \frac{\partial F_m}{\partial p^3} \right) &= (q^1, q^2, q^3) V^{(m)}(u, \Delta)^T, \left(\frac{\partial F_m}{\partial q^1}, \frac{\partial F_m}{\partial q^2}, \frac{\partial F_m}{\partial q^3} \right) = (p^1, p^2, p^3) V^{(m)}(u, \Delta) \end{aligned} \quad (19)$$

可证 Hamilton 函数是两两对合的, 即 $\{F_k, F_m\} = 0$, 这里 $\{ \cdot, \cdot \}$ 是 Poisson 括号

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^j} - \frac{\partial f}{\partial p^j} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right).$$

定理 1. 由 (16) 式定义的辛映射 H 完全可积, 其对合的保守积分系 $\{F_m\}$ 由方程

(19) 确定.

定理 2 令 $(q^1(t), q^2(t), q^3(t), p^1(t), p^2(t), p^3(t))$ 是如下常微分方程组的初值问题的

解
$$\frac{\partial}{\partial t} q^i = \frac{\partial F_{-1}}{\partial p^i}, \frac{\partial}{\partial t} p^i = -\frac{\partial F_{-1}}{\partial q^i}, (q^i, p^i)|_{t=0} = (q^i(0), p^i(0)), \quad i = 1, 2, 3$$

并且 $(q^1(n, t), q^2(n, t), q^3(n, t), p^1(n, t), p^2(n, t), p^3(n, t)) =$

$$H^n(q^1(t), q^2(t), q^3(t), p^1(t), p^2(t), p^3(t))$$

则 $a(n, t) = -\langle q^3(n, t), p^1(n, t) \rangle,$

$$b(n, t) = -\langle q^3(n, t), p^1(n, t) \rangle^{-1} \langle q^2(n, t), p^1(n, t) \rangle,$$

$$c(n, t) = -\langle q^3(n, t), p^1(n, t) \rangle$$

是晶格孤子方程 (9) 的解.

参 考 文 献

- 1 Cao C W, Geng X G. Classical integrable systems generated through nonlinearization of eigenvalue problems. In: Gu C H, ed. Nonlinear physics, research reports in physics. Berlin: Springer Publ, 1990. 68~ 78
- 2 Cao C W. A classical integrable system and the involutive representation of solutions of the Kdv equation. Acta Mathematica Sinica. 1991, 7: 216~ 223
- 3 Geng X G. The Hamiltonian structure and new finite-dimensional integrable system associated with Harry-Dym type equations. Phys Lett A, 1994, 194: 44
- 4 李翊神. 相联于 3×3 谱问题的可积方程的某些问题. 北京大学学报 (自然科学版), 1992, 28(1): 17 ~ 25
- 5 Tu G Z. The trace identity, a powerful tool for constructing the Hamiltonian structures of integrable systems (I). J Math Phys, 1989, 30: 330~ 338

A Hierarchy of Integrable Lattice Soliton Equations and Its Integrable Symplectic Map

Zhu Siming^{*} Shi Qiyan Zhang Lei

Abstract A hierarchy of integrable lattice soliton equations and its Hamiltonian structure associated with a 3×3 matrix spectral problem are got and an integrable symplectic map is obtained by nonlinearization of Lax pairs and adjoint Lax pairs of the hierarchy. Moreover, the solutions of the prototype system in the lattice equations hierarchy are reduced to the solutions of a system of ordinary differential equations and a simple iterative process of the symplectic map.

Keywords lattice soliton equation, integrable system, Lax pair, symplectic map

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China