

KdV-mKdV-Burgers 方程和 KPP 方程的精确行波解^{*}

朱燕娟

(广东工业大学数理系, 广州 510090)

摘 要 利用一种直接的代数方法, 求出了组合 KdV-mKdV-Burgers 方程和 Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov 方程的几类行波解, 其方法也可推广求解高维非线性演化方程.

关键词 非线性演化方程, 精确解, 行波解, 直接方法

分类号 O 411.1, O 175.29

非线性演化方程精确解的研究在理论和应用上有着重要的价值, 自从较为一般的反散射方法问世以来, 非线性演化方程的精确解研究逐渐成为一个活跃的领域, 并引起了人们的关注. 近年来, 求解非线性演化方程精确行波解的代数方法不断出现, 本文推广已被人们广泛使用的所谓“双曲函数方法”^[1-8], 求解组合 KdV-mKdV-Burgers 方程

$$u_t + Tu u_x + U u^2 u_x + V u_{xx} + W u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

(T, U, V, W 是任意常数) 和 Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov 方程

$$u_t - u u_x + \nu u^2 + \lambda u^3 = 0 \quad (2)$$

(ν, λ 是任意常数) 的几类精确行波解. 很明显, 各种重要的非线性演化方程如 KdV 方程, mKdV 方程, KdV-mKdV 组合方程, KdV-Burgers 方程, mKdV-Burgers 方程是方程 (1) 的特殊情形, Fisher 方程, Newell-Whitehead 方程, Fitzhugh-Nagumo 方程是方程 (2) 的特殊情形. 我们考虑方程 (1) 和 (2) 的行波解

$$u(x, t) = u(\xi) = u[k(x - kt)] \quad (3)$$

其中 k 和 k 是待定常数. 把 (3) 式代入方程 (1) 和 (2), 得到

$$-k u^3 + T u u^2 + U u^2 u + V k u^3 + S k^2 u^3 = 0 \quad (4)$$

$$-k k u^3 - k^2 u^3 - u + \nu u^2 + \lambda u^3 = 0 \quad (5)$$

假定

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m A_i f^i \quad (6)$$

其中函数 $f(\xi)$ 可取为: $f(\xi) = \tanh \xi$, $f(\xi) = \coth \xi$, $f(\xi) = \tan \xi$, $f(\xi) = \cot \xi$. 系数 A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 为待定常数. 将 (6) 式代入方程 (1) 或 (2), 通过平衡方程的线性最高导数项和非线性项的阶数, 可以确定精确行波解的阶数 m .

* 广东工业大学科研基金 (9720375206) 资助项目

收稿日期: 1997-12-10 朱燕娟, 女, 40 岁, 讲师

1 组合 KdV-mKdV-Burgers 方程的精确行波解

把 (6) 代入方程 (4), 由领头项分析可得 $m=1$, 于是有

$$u = A_0 + A_1 f \quad (7)$$

把 (7) 式代入方程 (4), 可得到一组确定常数 A_0 , A_1 , k 和 k 的方程:

(1) 对 $f = \tanh^{-1}$ 和 $f = \coth^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} kA_1 - TA_0A_1 + UA_1^3 - UA_0^2A_1 + 8W^2A_1 &= 0 \\ TA_1^2 + 2UA_0A_1^2 + 2WkA_1 &= 0, \quad kA_1 - TA_0A_1 - UA_0^2A_1 + 2W^2A_1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

由于方程 (8) 共有 4 个未知数, 而只有 3 个独立方程, 选取 k 为自由参数, 求得

$$\begin{aligned} A_0 &= -T/2U \mp V / \sqrt{-6W}, \quad A_1 = \pm \sqrt{-\Delta_1/2U}, \\ \Delta_1 &= V^2 \mp 3T^2/2U - 6k, \quad k = \pm \sqrt{-\Delta_1/12W} \end{aligned} \quad (9)$$

如果 $W > 0$, $U < 0$, $k < -\frac{2V^2 + 3T^2}{12U}$ 或 $W < 0$, $U > 0$, $k > -\frac{2V^2 + 3T^2}{12U}$, 则 A_0 , A_1 和 k 有实解.

由于 $\tanh(-a) = -\tanh a$, $\coth(-a) = -\coth a$, 得到组合 KdV-mKdV-Burgers 方程的 4 个精确行波解:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sqrt{-\Delta_1/2U} \tanh \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \\ u_2(x, t) &= -\sqrt{-\Delta_1/2U} \tanh \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \\ u_3(x, t) &= \sqrt{-\Delta_1/2U} \coth \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \\ u_4(x, t) &= -\sqrt{-\Delta_1/2U} \coth \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \end{aligned} \quad (10)$$

(2) 对于 $f = \tan^{-1}$ 和 $f = \cot^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} kA_1 + TA_0A_1 + UA_1^3 + UA_0^2A_1 + 8W^2A_1 &= 0 \\ TA_1 + 2UA_0A_1^2 + 2WkA_1 &= 0, \quad kA_1 - TA_0A_1 - UA_0^2A_1 - 2W^2A_1 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

类似可求得

$$A_0 = -(T/2U) \mp (V / \sqrt{-6W}), \quad A_1 = \pm \sqrt{-\Delta_1/2U}, \quad k = \pm \sqrt{-\Delta_1/12W} \quad (12)$$

于是我们又得到组合 KdV-mKdV-Burgers 方程的 4 个精确行波解

$$\begin{aligned} u_5(x, t) &= \sqrt{-\Delta_1/2U} \tanh \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \\ u_6(x, t) &= -\sqrt{-\Delta_1/2U} \tanh \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \\ u_7(x, t) &= \sqrt{-\Delta_1/2U} \coth \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \\ u_8(x, t) &= -\sqrt{-\Delta_1/2U} \coth \left[\sqrt{-\Delta_1/12W}(x - kt) \right] - T/2U \mp V / \sqrt{-6W} \end{aligned} \quad (13)$$

2 Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov 方程的精确行波解

类似于组合 KdV-mKdV-Burgers 方程, 我们仍能假定方程的形式解为

$$u = B_0 + B_1 f \quad (14)$$

把 (14) 代入方程 (5), 可得到一组确定常数 B_0, B_1, k 和 k 的方程:

(1) 对 $f = \tanh^{-1}$ 和 $f = \coth^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} -k k B_{1+} - B_{0+} \nu B_{0+}^2 + \lambda B_{0+}^3 &= 0, & 2k^2 B_{1+} - B_{1+} 2\nu B_0 B_{1+} - 3\lambda B_0^2 B_{1+} &= 0 \\ k k B_{1+} \nu B_{1+}^2 - 3\lambda B_0 B_{1+}^2 &= 0, & -2k^2 B_{1+} + \lambda B_{1+}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

从方程 (15) 可求得

$$k^2 = \lambda B_{1+}^2 / 2, \quad k = \pm \sqrt{2\lambda} (\nu + 3B_0), \quad B_{1+}^2 = -\frac{1}{\lambda} - \frac{2\nu}{\lambda} B_0 - 3B_0^2 \quad (16)$$

$$-\nu \lambda + 2(\nu^2 \lambda + \lambda) B_{0+} - 8\nu B_{0+}^2 - 8\lambda B_{0+}^3 = 0 \quad (17)$$

从方程 (17) 可求得 B_0 的 3 个解

$$B_{01} = -\nu / \lambda, \quad B_{02} = (-\nu + \Delta_2) / 4\lambda, \quad B_{03} = (-\nu - \Delta_2) / 4\lambda, \quad \Delta_2 = \nu^2 - 4\lambda \quad (18)$$

把 (18) 代入方程组 (16), 可进一步求得

$$B_{11} = \pm \sqrt{\Delta_2 / \lambda}, \quad B_{12} = \pm \sqrt{\Delta_2} B_{02}, \quad B_{13} = \pm \sqrt{\Delta_2} B_{03} \quad (19)$$

$$k_1 = \pm \sqrt{\Delta_2 / 2\lambda}, \quad k_2 = \pm \sqrt{\Delta_2} (\nu - \Delta_2) / 4\lambda, \quad k_3 = \pm \sqrt{\Delta_2} (\nu + \Delta_2) / 4\lambda \quad (20)$$

$$k_1 = \pm \sqrt{2\lambda} (\nu + 3B_{01}), \quad k_2 = \pm \sqrt{2\lambda} (\nu + 3B_{02}), \quad k_3 = \pm \sqrt{2\lambda} (\nu + 3B_{03}) \quad (21)$$

其中, $\pm = 1 (i = 1, \dots, 6)$. 如果 $\lambda > 0, \Delta_2 > 0$, 则得到 B_0, B_1, k, k 有 3 个实解.

把 (18)~(21) 代入方程 (14), 得到方程 (2) 的 6 个精确行波解

$$u_1(x, t) = -\frac{\nu}{2\lambda} + \pm \sqrt{\frac{\Delta_2}{\lambda}} \tanh \left[\pm \sqrt{\frac{\Delta_2}{2\lambda}} x + \pm \left(\nu - \frac{\Delta_2}{2} \right) t \right] \quad (22)$$

$$u_2(x, t) = \frac{-\nu + \Delta_2}{4\lambda} - \pm \sqrt{\frac{\nu - \Delta_2}{4\lambda}} \tanh \left\{ \pm \sqrt{\frac{\nu - \Delta_2}{4\lambda}} x - \pm \left[\frac{(\nu - \frac{\Delta_2}{2})^2}{16\lambda} - \frac{\nu}{2} \right] t \right\} \quad (23)$$

$$u_3(x, t) = \frac{-\nu + \Delta_2}{4\lambda} - \pm \sqrt{\frac{\nu + \Delta_2}{4\lambda}} \tanh \left\{ \pm \sqrt{\frac{\nu + \Delta_2}{4\lambda}} x - \pm \left[\frac{(\nu + \frac{\Delta_2}{2})^2}{16\lambda} - \frac{\nu}{2} \right] t \right\} \quad (24)$$

$$u_4(x, t) = -\frac{\nu}{2\lambda} + \pm \sqrt{\frac{\Delta_2}{\lambda}} \coth \left[\pm \sqrt{\frac{\Delta_2}{2\lambda}} x + \pm \left(\nu - \frac{\Delta_2}{2} \right) t \right] \quad (25)$$

$$u_5(x, t) = \frac{-\nu + \Delta_2}{4\lambda} - \pm \sqrt{\frac{\nu - \Delta_2}{4\lambda}} \coth \left\{ \pm \sqrt{\frac{\nu - \Delta_2}{4\lambda}} x - \pm \left[\frac{(\nu - \frac{\Delta_2}{2})^2}{16\lambda} - \frac{\nu}{2} \right] t \right\} \quad (26)$$

$$u_6(x, t) = \frac{-\nu + \Delta_2}{4\lambda} - \pm \sqrt{\frac{\nu + \Delta_2}{4\lambda}} \coth \left\{ \pm \sqrt{\frac{\nu + \Delta_2}{4\lambda}} x - \pm \left[\frac{(\nu + \frac{\Delta_2}{2})^2}{16\lambda} - \frac{\nu}{2} \right] t \right\} \quad (27)$$

(2) 对 $f = \tan^{-1}$ 和 $f = \cot^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} -k k B_{1+} - B_{0+} \nu B_{0+}^2 + \lambda B_{0+}^3 &= 0, & -2k^2 B_{1+} - B_{1+} 2\nu B_0 B_{1+} - 3\lambda B_0^2 B_{1+} &= 0 \\ -k k B_{1+} \nu B_{1+}^2 - 3\lambda B_0 B_{1+}^2 &= 0, & -2k^2 B_{1+} + \lambda B_{1+}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

从方程 (28) 可求得

$$B_0 = -\nu / \lambda, \quad B_{1+} = \pm \sqrt{-\Delta_2 / \lambda}, \quad k_1 = \pm \sqrt{-\Delta_2 / 2\lambda}, \quad k = \pm \sqrt{-\Delta_2} / \lambda \quad (29)$$

如果 $\lambda > 0, \Delta_2 \leq 0$, 可知 B_0, B_1, k_1 和 k 有实解, 于是可得方程 (2) 的 2 个精确行波解

$$u_7(x, t) = -\frac{\nu}{2\lambda} + \pm \sqrt{\frac{-\Delta_2}{\lambda}} \tanh \left[\pm \sqrt{\frac{-\Delta_2}{2\lambda}} x + \pm \left(-\frac{\nu}{2\lambda} \right) t \right] \quad (30)$$

$$u^s(x, t) = -\frac{\nu}{2\lambda} + X \left(\frac{-\Delta_2}{-2\lambda} \right) \coth \left[X \left(\frac{-\Delta_2}{-2\lambda} \right) \left(x + X \frac{\nu}{2\lambda} t \right) \right] \quad (31)$$

其中, $X = X_+ = X_- = \pm 1$.

3 结 论

利用一种推广的直接方法, 求出了组合 KdV-mKdV-Burgers 方程和 Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov 方程的多类精确行波解. 很显然, 本文方法也可处理 2+1 维组合 KdV-mKdV-Burgers 方程 $(u + Tu_x + Uu^2_x + V_{ux} + W_{xxx})_x + Z_{uy} = 0$ 和 2+1 维 Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov 方程 $(u - u_{xx} - u^2 + \nu u^2 + \lambda u^3)_{xx} + W_{yy} = 0$ 的精确行波解.

参 考 文 献

- 1 Malfleit W. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. Am J Phys, 1992, 60: 650~654
- 2 Lou S Y, Huang G X, Ruan H Y. Exact solitary waves in a convecting fluid. J Phys A: Math Gen, 1991, 24: 587~590
- 3 krishnan E V. Exact Solutions of reaction-diffusion equation. J Phys soc Jpn, 1993, 62: 1076
- 4 Huang G X, Lou S Y, Dai X X. Exact and explicit solitary wave solutions to a model equation for water waves. Phys Lett, 1989, 139: 373~374
- 5 Mohamad M N B. Exact solutions to the combined KdV and mKdV equation. Math Meth in the Appl Sci, 1992, 15: 73~78
- 6 Jeffrey A, Xu S. Travelling waves solutions to certain non-linear evolution equations. Int J Non-Linear Mechanics, 1989, 24: 425~429
- 7 Parkes E J. Exact solutions to the two-dimensional Korteweg-de Vries-Burgers equation. J Phys A: Math Gen, 1994, 27: 497~501
- 8 李志斌, 张善卿. 非线性波方程准确孤立波解的符号计算. 数学物理学报, 1997, 17: 81~89

Exact Solitary Wave Solutions of the KdV-mKdV-Burgers and KPP Equations

Zhu Yanjuan*

Abstract The solitary wave solutions of the combined KdV-mKdV-Burgers equation and the Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation are obtained by means of the direct algebra method, which can be generalized to deal with high dimensional nonlinear evolution equations.

Keywords nonlinear evolution equation, exact solution, solitary wave solution, direct method

* Department of Mathematics & Physics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090,