

有限区间上标准正交周期样条小波基的构造^{*}

陈文胜

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 运用非负整数次 B 样条函数构造了具有了任意正则性的标准正交周期样条小波基, 得到了小波函数 $j_p^{n,m}(x)$ 的解析表达式, 并给出了 Hilbert 函数的空间 $L_2^{\circ}[0, T]$ 1 个有效的小波分解和重构算法.

关键词 B 样条, 小波, 分解, 重构

分类号 O 174. 2

文 [1] 将 Kamada M 等^[2]的正交化方法应用于奇数次 B 样条, 构造了空间 $L_2^{\circ}[0, T]$ 的 1 组标准正交基. 但在同一水平 m 上, 样本空间 V_m 和小波空间 W_m 并非分别由同一个函数的平移系所生成, 因此, 它不是小波基, 文 [1] 称之为拟小波基. 本文运用任意非负整数 B 样条函数成功地构造了空间 $L_2^{\circ}[0, T]$ 的 1 组标准正交小波基.

1 B 样条与周期样条函数

定义 1 设 n 为非负整数, h 为正实数, 节点 $y_j = jh, j \in \mathbf{Z}$ 对 $\forall j \in \mathbf{Z}$, 定义 B 样条函数 $B_i^n(x) = (-1)^{n+1} (y_{i+n+1} - y_i) \circ G(x - y_i, \dots, x - y_{i+n+1})$, 其中, $G(x - y_i, \dots, x - y_{i+n+1}) = \sum_{j=i}^{i+n+1} k_j \circ (x - y_j)_+^n$, $k_j = \prod_{\substack{l=i \\ l \neq j}}^{i+n+1} \frac{1}{y_l - y_l}$.

定义 2 (周期样条函数空间) $P_{n,K}^{\circ} = P_{n,K}^{\circ}([0, T]) = \{f \mid f \text{ 在 } [jh, (j+1)h] \text{ 上是 } n \text{ 次多项式}, 0 \leq j \leq K-1, f \in C^{n-1}[0, T], \text{ 且 } f^{(i)}(0) = f^{(i)}(T), 0 \leq i \leq n-1\}$, 其中, K 为正整数, n 为非负整数, 且 $K > 2n+2, T = Kh$.

定义 3 定义 $B_i^{n,m}(x) = B_i^n(2^m x)$, $\mathcal{B}_i^{n,m}(x) = B_i^{n,m}(x) + B_{i+K_m}^{n,m}(x), x \in [0, T], K_m = 2^m K, h_m = 2^{-m} h$.

函数空间 $L_2^{\circ}[0, T]$ 中函数的内积定义为 $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx$, 函数 $f \in L_2^{\circ}[0, T]$ 的模: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, 不难验证 $L_2^{\circ}[0, T]$ 在这个内积下是一 Hilbert 空间.

可由归纳法证得如下引理 1, 其收敛性的证明参见文 [3].

引理 1 对于 $x \in [0, T]$

* 广东省自然科学基金 (960018) 和中山大学高等学术研究中心基金资助项目

收稿日期: 1997-07-02 陈文胜, 男, 30 岁, 博士研究生

$$\mathcal{B}_i^{n,m}(x) = (K_m)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(k\pi/K_m)}{k\pi} \circ e^{-ik\pi/K_m} \right)^{m-1} \exp \frac{2\pi i k x}{T} \quad (1)$$

且 (1) 式中的级数在 $[0, T]$ 绝对一致收敛到 $\mathcal{B}_i^{n,m}(x)$.

定理 1 若 $n \in \mathbb{Z}$, 且 $m \geq m_0$, $m_0 = -\left\lfloor \ln \frac{K}{n+1} \right\rfloor \lfloor \ln 2 \rfloor$, 则函数系 $\{\mathcal{B}_i^{n,m}(x)\}_{i=0}^{K_m-n-1}$ 构成 P_{n,K_m}° 的一组基, 且满足如下双尺度方程

$$\mathcal{B}_i^{n,m}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} f_{n,j} \mathcal{B}_{j+2}^{n,m-1}(x), \quad x \in [0, T], \quad -n \leq i \leq K_m - n - 1$$

其中, $f_{n,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} c_{n+1}^j & 0 \leq j \leq n-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$. 特别地, $\mathcal{B}_i^{n,m}(x)$ 可被周期延拓到整个实轴 $\mathbb{R}$ 上, 得到的 $\mathcal{B}_i^{n,m}(x)$ 亦满足

$$\mathcal{B}_i^{n,m}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} f_{n,j} \mathcal{B}_{j+2}^{n,m-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

定义 4 定义 $V_m = P_{n,K_m}^\circ([0, T])$, $W_m = V_m \cap V_{m-1}$.

由定义 4 和定理 1 知: $V_m \subset V_{m+1} \subset \dots$, ($m \geq m_0$). 若定义 $V_{m_0-1} = \{0\}$, 则有 $\bigcap_{l=m_0-1}^m V_l = \{0\}$, 另外, 由文 [4] 有 $L_2^\circ[0, T] = \text{clos}_2\left(\bigcup_{m \geq m_0-1} V_m\right)$.

2 尺度函数的构造

定义 5 对于 $0 \leq p \leq K_m - 1$, 定义函数 $H_p^{n,m}(x) = C_p^{n,m} \sum_{l=0}^{K_m-1} \exp\left(\frac{2\pi i l p}{K_m}\right) \mathcal{B}_l^{n,m}(x)$,

其中 $C_p^{n,m} = (K_m)^{-n-1} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(p\pi/K_m)}{(p+\lambda K_m)\pi} \right)^{2n} \right]^{-\frac{1}{2}}$ (2)

引理 2 $\{H_p^{n,m}(x) | 0 \leq p \leq K_m - 1\}$ 是 V_m 的一组标准正交基.

引理 3 对于 $m_0 \leq m' \leq m$, $m_0 = -\left\lfloor \ln \frac{K}{n+1} \right\rfloor \lfloor \ln 2 \rfloor$ 成立

$$H_p^{n,m}(x) \left(x - j h_{m'} \right) = \exp \left(\frac{-2\pi i j p}{K_{m'}} \right) H_p^{n,m}(x), \quad j \in \mathbb{Z}$$

引理 4 $H_p^{n,m}(x)$, $0 \leq p \leq K_m - 1$ 满足如下细分方程

$$H_p^{n,m}(x) = a_p^{n,m+1} H_p^{n,m+1}(x) + b_p^{n,m+1} H_{p+K_m}^{n,m+1}(x) \quad (3)$$

其中 $a_p^{n,m+1} = C_p^{n,m} \left[\cos \frac{p\pi}{K_{m+1}} \circ \exp \frac{-2\pi i p}{K_{m+1}} \right]^{n+1} \setminus C_p^{n,m+1}$ (4)

$$b_p^{n,m+1} = C_p^{n,m} \left[\cos \frac{(p+K_m)\pi}{K_{m+1}} \circ \exp \frac{-2\pi i (p+K_m)}{K_{m+1}} \right]^{n+1} \setminus C_{p+K_m}^{n,m+1} \quad (5)$$

定义 6 (尺度函数) 对于任意非负整数 n 和 $m (m \geq m_0)$, 定义

$$\mathcal{Q}^m(x) = \frac{1}{K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} H_p^{n,m}(x) \quad (6)$$

对于 $1 \leq j \leq K_m - 1$, 定义 $\mathcal{Q}^m(x) = \mathcal{Q}^m(x - j h_m)$. 更一般地, 对于 $k \in \mathbb{Z}$, 定义 $\mathcal{Q}^m(x) = \mathcal{Q}_{\text{mod } K_m}^m(x)$.

由引理 3 知, $\mathcal{Q}^m(x)$ 可表为

$$\mathcal{Q}^m(x) = \frac{1}{K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} \left[\exp \frac{-\mathfrak{X} i j p}{K_m} \right] H_{p_1}^{n,m}(x) \quad (7)$$

定理 2 $\{ \mathcal{Q}^m(x) | 0 \leq j \leq K_m - 1 \}$ 是尺度函数空间 V_m 的一组标准正交基.

证明 由定义 5 和 (7) 式, 易知 $\mathcal{Q}^m(x) \in V_m$, $0 \leq j \leq K_m - 1$. 下面只需证对 $0 \leq j_1, j_2 \leq K_m - 1$, $\langle \mathcal{Q}_{j_1}^m(x), \mathcal{Q}_{j_2}^m(x) \rangle = \mathbb{W}_{j_1, j_2}$ 即可. 由 (7) 式和引理 2 有

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{j_1}^m(x), \mathcal{Q}_{j_2}^m(x) \rangle &= \frac{1}{K_m} \sum_{p_1, p_2=0}^{K_m-1} \exp \frac{\mathfrak{X} i (j_2 p_2 - j_1 p_1)}{K_m} \langle H_{p_1}^{n,m}(x), H_{p_2}^{n,m}(x) \rangle = \\ &= \frac{1}{K_m} \sum_{p_1, p_2=0}^{K_m-1} \exp \frac{\mathfrak{X} i (j_2 p_2 - j_1 p_1)}{K_m} \cdot \mathbb{W}_{p_1, p_2} = \frac{1}{K_m} \sum_{p_1=0}^{K_m-1} \exp \frac{\mathfrak{X} i p_1 (j_2 - j_1)}{K_m} = \mathbb{W}_{j_1, j_2} \end{aligned}$$

3 小波函数的构造

定义 7 函数 $G_p^{n,m}(x)$, $0 \leq p \leq K_m - 1$ 定义为 $G_p^{n,m}(x) = b_p^{n,m+1} H_p^{n,m+1}(x) + (-1)^n a_p^{n,m+1} H_{p+K_m}^{n,m+1}(x)$. 其中, $a_p^{n,m+1}$, $b_p^{n,m+1}$ 见 (4), (5) 式.

引理 5 $\{ G_p^{n,m}(x) | 0 \leq p \leq K_m - 1 \}$ 是小波空间 W_m 的一组标准正交基.

引理 6 对 $0 \leq p \leq K_m - 1$, $j \in \mathbb{Z}$, 有 $G_p^{n,m}(x - jh_m) = \left[\exp \frac{-\mathfrak{X} i j p}{K_m} \right] G_p^{n,m}(x)$.

证明 由定义 7 和引理 3 有

$$\begin{aligned} G_p^{n,m}(x - jh_m) &= b_p^{n,m+1} H_p^{n,m+1}(x - jh_m) + (-1)^n a_p^{n,m+1} H_{p+K_m}^{n,m+1}(x - jh_m) = \\ &= b_p^{n,m+1} \exp \frac{-\mathfrak{X} i j p}{K_m} \cdot H_p^{n,m+1}(x) + (-1)^n a_p^{n,m+1} \exp \frac{-\mathfrak{X} i j (p+K_m)}{K_m} \cdot H_{p+K_m}^{n,m+1}(x) = \\ &= \exp \frac{-\mathfrak{X} i j p}{K_m} \cdot \left[b_p^{n,m+1} H_p^{n,m+1}(x) + (-1)^n a_p^{n,m+1} H_{p+K_m}^{n,m+1}(x) \right] = \exp \frac{-\mathfrak{X} i j p}{K_m} \cdot G_p^{n,m}(x) \end{aligned}$$

定义 8 (小波函数) 对 $\forall n, m \in \mathbb{N} (m \geq m_0)$, 定义 $j_0^{n,m}(x) = \frac{1}{K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} G_p^{n,m}(x)$; 对于

$j \leq K_m - 1$, 定义 $j_j^{n,m}(x) = j_0^{n,m}(x - jh_m)$. 更一般地, 对于 $j \in \mathbb{Z}$, 定义 $j_j^{n,m}(x) = j_{j \bmod K_m}^{n,m}(x)$.

定理 3 $\{ j_j^{n,m}(x) | 0 \leq j \leq K_m - 1 \}$ 是小波空间 W_m 的一组标准正交基.

因此, $W_m = \text{span} \{ j_j^{n,m}(x) | 0 \leq j \leq K_m - 1 \}$. 由第一节知空间 $L_2^{\circ}[0, T]$ 有如下分解:

$L_2^{\circ}[0, T] = V_{m_0} \bigoplus_{j=m_0}^{\infty} W_j$, $m_0 = - \left[\ln \frac{K}{n+1} \right] \lfloor \ln 2 \rfloor$. 易见, 函数系

$$B = \bigcup_{j=m_0}^{\infty} \left\{ j_p^{n,j}(x) | 0 \leq p \leq K_j - 1 \right\} \cup \left\{ \mathcal{Q}^{m_0}(x) | 0 \leq p \leq K_{m_0} - 1 \right\}$$

为空间 $L_2^{\circ}[0, T]$ 的一组标准正交周期样条小波基.

4 双尺度关系

由于 $V_m \subset V_{m+1}$, $W_m \subset V_{m+1}$, 所以存在常数 $\gamma_{jl}^{n,m+1}$ 和 $\tilde{g}_{jl}^{n,m+1}$, 使得

$$\mathcal{Q}^m(x) = \sum_{l=0}^{K_m-1} \gamma_{jl}^{n,m+1} \mathcal{Q}^{m+1}(x), \quad j_j^{n,m}(x) = \sum_{l=0}^{K_m-1} \tilde{g}_{jl}^{n,m+1} \mathcal{Q}^{m+1}(x) \quad (8)$$

精确地说, 本文有如下定理 4.

定理 4 对于任意整数 $n (n \geq 0)$, $m (m \geq m_0)$ 和 $0 \leq j \leq K_m - 1$ 有

$$\mathcal{Q}_j^m(x) = \sum_{l=0}^{K_m-1} h_{l-2j}^{n,m+1} \mathcal{Q}_l^{m+1}(x), \quad \mathcal{I}_j^m(x) = \sum_{l=0}^{K_m-1} g_{l-2j}^{n,m+1} \mathcal{Q}_l^{m+1}(x)$$

$$\text{其中 } h_r^{n,m+1} = \frac{1}{2K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} [a_p^{n,m+1} + (-1)^r b_p^{n,m+1}] \exp \frac{\pi i r p}{K_{m+1}},$$

$$g_r^{n,m+1} = \frac{1}{2K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} [b_p^{n,m+1} + (-1)^{m-r} a_p^{n,m+1}] \exp \frac{\pi i r p}{K_{m+1}}.$$

证明 由 (8), (6) 和 (3) 式有

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ji}^{n,m+1} &= \langle \mathcal{Q}_j^m(x), \mathcal{I}_l^{n,m+1}(x) \rangle = \\ &\langle -\frac{1}{K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} \exp \frac{\pi i j p}{K_m} \cdot H_p^{n,m}(x), -\frac{1}{K_{m+1}} \sum_{q=0}^{K_m-1} \exp \frac{\pi i l q}{K_{m+1}} \cdot H_q^{n,m+1}(x) \rangle = \\ &-\frac{1}{2K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} \sum_{q=0}^{K_m-1} \exp \frac{\pi i (l q - 2 j p)}{K_{m+1}} \cdot \langle H_p^{n,m}(x), H_q^{n,m+1}(x) \rangle = \\ &-\frac{1}{2K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} \sum_{q=0}^{K_m-1} \exp \frac{\pi i (l q - 2 j p)}{K_{m+1}} \langle a_p^{n,m+1} H_p^{n,m+1}(x) + b_p^{n,m+1} H_{p+K_m}^{n,m+1}(x), H_q^{n,m+1}(x) \rangle = \\ &-\frac{1}{2K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} [a_p^{n,m+1} + (-1)^{l-2j} b_p^{n,m+1}] \exp \frac{\pi i (l - 2j)p}{K_{m+1}} \end{aligned}$$

若对 $\forall r \in \mathbb{Z}$ 记

$$h_r^{n,m+1} = \frac{1}{2K_m} \sum_{p=0}^{K_m-1} [a_p^{n,m+1} + (-1)^r b_p^{n,m+1}] \exp \frac{\pi i r p}{K_{m+1}}$$

则 $\mathcal{H}_{ji}^{n,m+1} = h_{l-2j}^{n,m+1}$. 对于 $\tilde{g}_{jl}^{n,m+1}$ 可类似证明.

5 空间 $L_2^\circ[0, T]$ 的小波分解与重构

定义 9 对 $\forall f(x) \in L_2^\circ[0, T]$, 定义映函数 $f(x)$ 到 V_m 和 W_m 中的正交投影算子 P_m , Q_m ($m \geq m_0$) 分别为

$$P_m f = \sum_{j=0}^{K_m-1} s_j^m \mathcal{Q}_j^m(x), \quad Q_m f = \sum_{j=0}^{K_m-1} d_j^m \mathcal{I}_j^m(x)$$

其中, $s_j^m = \langle P_m f, \mathcal{Q}_j^m(x) \rangle$, $d_j^m = \langle Q_m f, \mathcal{I}_j^m(x) \rangle$. 特别地, $j \in \mathbb{Z}$ 时, 定义 $s_j^m = s_{j \bmod K_m}^m$, $d_j^m = d_{j \bmod K_m}^m$.

定理 5 对 $\forall f(x) \in L_2^\circ[0, T]$, 有如下分解与重构公式

$$(1) \text{ (分解公式) } s_j^m = \sum_{l=0}^{K_m-1} h_{l-2j}^{n,m+1} s_l^m, \quad d_j^m = \sum_{l=0}^{K_m-1} g_{l-2j}^{n,m+1} s_l^m \quad (j = 0, 1, \dots, K_m-1)$$

$$(2) \text{ (重构公式) } s_l^{m+1} = \sum_{j=0}^{K_m-1} \left(h_{l-2j}^{n,m+1} s_j^m + g_{l-2j}^{n,m+1} d_j^m \right) \quad (0 \leq l \leq K_{m+1}-1)$$

证明 (1) 只证其中一个, 另一分解式可类似证明.

对 $0 \leq j \leq K_m-1$ 有

$$\begin{aligned} s_j^m &= \langle P_m f, \mathcal{Q}_j^m(x) \rangle = \langle P_m f + Q_m f, \mathcal{Q}_j^m \rangle = \langle P_{m+1} f, \mathcal{Q}_j^m \rangle = \\ &\left\langle \sum_{l=0}^{K_m-1} s_l^{m+1} \mathcal{Q}_l^{m+1}(x), \sum_{p=0}^{K_m-1} h_{p-2j}^{n,m+1} \mathcal{Q}_p^{m+1}(x) \right\rangle = \sum_{l=0}^{K_m-1} h_{l-2j}^{n,m+1} s_l^{m+1}; \end{aligned}$$

(2) 对 $(0 \leq l \leq K_{m+1}-1)$ 有

$$\begin{aligned}
 P_{m+1}f &= P_m f + Q_m f = \sum_{j=0}^{K_m-1} s_j^m \Phi_j^m(x) + \sum_{j=0}^{K_m-1} d_j^m \dot{\Psi}_j^m(x) = \\
 &= \sum_{j=0}^{K_m-1} s_j^m \sum_{l=0}^{K_{m+1}-1} h_{l-2j}^{n,m+1} \Phi_l^{m+1}(x) + \sum_{j=0}^{K_m-1} d_j^m \sum_{l=0}^{K_{m+1}-1} g_{l-2j}^{n,m+1} \Phi_l^{m+1}(x) = \\
 &= \sum_{l=0}^{K_{m+1}-1} \left[\sum_{j=0}^{K_m-1} \left(h_{l-2j}^{n,m+1} s_j^m + g_{l-2j}^{n,m+1} d_j^m \right) \right] \Phi_l^{m+1}(x)
 \end{aligned}$$

故

$$s_l^{m+1} = \sum_{j=0}^{K_m-1} \left(h_{l-2j}^{n,m+1} s_j^m + g_{l-2j}^{n,m+1} d_j^m \right)$$

参 考 文 献

- 1 Chen H L. Periodic orthonormal quasi-wavelet bases. Chinese Science Bulletin, 1996, 41(7): 552
- 2 Kamada M, Toraichi K, Mori R. Periodic spline orthonormal bases. J of Appr Th, 1988, 55: 27
- 3 Davis P J. Interpolation and approximation. New York: Blaisdell Publishing Company, 1963. 1~999
- 4 Schumaker L. Spline functions basic thoery. New York: John Wiley and Sons Ins, 1981. 307~308

Construction of Orthonormal Periodic Spline Wavelet Bases on the Interval

Chen Wensheng^{*}

Abstract B-spline functions of non-negative integer order are used to construct orthonormal periodic spline wavelet basis on the interval $[0, T]$ with any desired regularity. Explicit expressions of the wavelet function $\dot{\Psi}_p^m(x)$, the efficient wavelet decomposition and reconstruction algorithms of Hilbert function space $L^2[0, T]$ are established.

Keywords B-spline, wavelets, decomposition, reconstruction

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China