

机翼非线性颤振的分叉点研究^{*}

刘济科 高 磊

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要 对定常空气动力作用下, 含立方非线性刚度的二元机翼颤振系统的分叉点进行了研究. 应用中心流形理论将四维系统降为二维系统, 并采用形式级数判别法对分叉点的类别及稳定性进行了分析.

关键词 机翼颤振, 分叉, 中心流形, 形式级数

分类号 O 322, TH 113

非线性系统平衡点的类别及其稳定性的判定, 是非线性研究的最基本的也是最重要的内容之一. 如果相应的线性近似系统的平衡点不是中心, 则原非线性系统的平衡点的类别及稳定性与其一致; 当线性近似系统的平衡点是中心时, 非线性系统的平衡点既可能是中心, 也可能是稳定焦点或不稳定焦点 (称之为假中心). 对于二维系统, 张锦炎^[1]、陆启韶^[2]分别介绍了几种方法, 如后继函数法、形式级数法、直接求周期解等, 用于判别真假中心. 这些方法虽然应用简单方便, 但迄今为止, 用它们来分析工程实际中的多维非线性振动系统的平衡点, 尤其是对分叉点真假中心等性质的研究, 尚未见到公开发表的文献.

含非线性因素的二元机翼颤振系统会出现许多现象, 如 Hopf 分叉, 极限环颤振^[3], 周期倍化及混沌现象^[4]等. 这些研究着重于分析机翼的颤振运动, 没有对分叉点的性质进行深入的研究, 而在许多工程实际问题中, 分叉点类别的判定非常重要. 为此, 本文在作者已有工作^[3]的基础上, 对含立方非线性俯仰刚度的机翼颤振系统的分叉点进行分析. 应用中心流形理论^[5]将四维系统降为二维系统, 该二维系统的近似线性系统的分叉点恰好是中心; 用形式级数法进行判别得出: 原非线性系统的分叉点不是中心, 而是稳定或不稳定焦点.

1 二元机翼的运动方程及分叉点

二元机翼具有 2 个自由度: 上下平移 h 及俯仰角 Γ . 在定常空气动力作用下, 具有粘性阻尼及立方俯仰刚度的颤振系统的运动方程是

$$\begin{cases} \ddot{h} + 0.25 \ddot{\Gamma} + 0.1 \dot{h} + 0.2 \dot{\Gamma} + 0.1 Q \Gamma = 0 \\ 0.25 \ddot{h} + 0.5 \ddot{\Gamma} + 0.1 \dot{\Gamma} + k \Gamma + e \Gamma^3 - 0.04 Q \Gamma = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, k 是线性俯仰刚度系数, e 是非线性刚度因子, 以下取 $e = 20$, Q 是广义气流速度.

^{*} 广东省自然科学基金 (960030), 航空科学基金及西安交通大学国家重点实验室开放基金资助项目

收稿日期: 1997-07-28 刘济科, 男, 30 岁, 副教授

从 (1) 中第 2 式易得, 机翼的静发散速度 $Q_d = k / 0.04$, 当 $Q > Q_d$ 时, 机翼发散, 在飞机工程中是绝不允许的. 因此, 本文的分析只限于 $Q < Q_d$ 的情况.

引入状态空间, 将 (1) 式改写成一阶常微分方程组

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}$ 是广义坐标列阵, $\mathbf{A}$ 是线性化矩阵, 且

$$\mathbf{x} = (\Gamma, \dot{\Gamma}, h, \dot{h})^T \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 20(0, -16/7, 0, 4/7)^T x_1^3 \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4(0.26Q - 4k)/7 & -1.6/7 & 0.8/7 & 0.4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4(k - 0.24Q)/7 & 0.4/7 & -1.6/7 & -0.8/7 \end{bmatrix} \quad (4)$$

下面应用 Routh-Hurwitz 准则来判断系统 (2) 平衡点的稳定性变化, 从而确定分叉点.

取 $k = 0.5$, 此时静发散速度 $Q_d = 12.5$, 当 $Q < 4.0801512$ 时, 系统 (2) 的唯一平衡点 $(0, 0, 0, 0)$ 稳定, $4.0801512 < Q < Q_d$ 时不稳定, 所以 $Q = 4.0801512 \triangleq Q_1$ 为分叉点;

取 $k = 0.0816$, 此时静发散速度 $Q_d = 2.04$, 当 $Q < 1.5568623$ 及 $1.9106378 < Q < Q_d$ 时, 平衡点 $(0, 0, 0, 0)$ 稳定, $1.5568623 < Q < 1.9106378$ 时不稳定, 所以 $Q = 1.5568623 \triangleq Q_2$ 及 $Q = 1.9106378 \triangleq Q_3$ 为 2 个分叉点.

对不同的 k , 系统 (2) 的静发散速度, 分叉点的位置都将发生变化. 这里分别取 $k = 0.5, 0.0816$ 进行分析, 只是用于说明分析方法. 事实上, 对其它 k , 可进行完全类似的分析.

2 中心流形理论降维

为了应用二维系统情况下的形式级数判别法, 必须将原四维颤振系统降维. 对系统 (2), $k = 0.5, Q_1 = 4.0801512$ 时, 选 $_ = Q - Q_1$ 为分叉参数, 其线性化矩阵 $\mathbf{A}$ 在分叉点即 $_ = 0$ 的 4 个特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5892162i, \lambda_3 = \lambda_4 = -0.1714286 \pm 0.6331204i \quad (5)$$

引进线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$, 其中 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, $\mathbf{P}$ 为相应于 (5) 式的特征向量组组成的方阵, 代入 (2) 式, 系统化成

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}_1 \mathbf{y} + _ \mathbf{B}_2 \mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (6)$$

其中, $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 20(-2.964942, 0.0682989, 2.964942, 2.742892)^T (y_1 + y_3)^3$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5982162 & 0 & 0 \\ 0.5982162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1714286 & -0.6331204 \\ 0 & 0 & 0.6331204 & -0.1714286 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.2668131 & 0 & 0.2668131 & 0 \\ 0.0495631 & 0 & 0.0495631 & 0 \\ -0.2668131 & 0 & -0.2668131 & 0 \\ -0.2092517 & 0 & -0.2092517 & 0 \end{bmatrix}$$

根据中心流形定理, 系统 (6) 具有中心流形: $y_3 = h_1(y_1, y_2, _) = -0.5593513y_1 + 0.6202773y_2 + O(3)$, $y_4 = h_2(y_1, y_2, _) = -0.8560522y_1 - 0.696465y_2 + O(3)$, 其中 $O(3)$ 表示三阶小量; 中心流形上的流即约化方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5982162 \\ 0.5982162 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} +$$

$$-\begin{bmatrix} 0.266 & 813 \\ 0.049 & 563 \end{bmatrix} (y_1 + h_1) + 20 \begin{bmatrix} -2.964 & 942 \\ 0.068 & 298 \end{bmatrix} (y_1 + h_1)^3 \quad (7)$$

这样便将原四维系统降成了二维系统.

同理, $k = 0.0816$, $Q_2 = 1.5568623$ 时, 选 Q_2 为分叉参数, 系统 (6) 具有中心流形: $y_3 = h_1(y_1, y_2, _) = -0.4255526y_1 + 0.5786874y_2 + O(3)$, $y_4 = h_2(y_1, y_2, _) = -0.9331816y_1 - 1.486862y_2 + O(3)$; 中心流形上的流为

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3823833 \\ 0.3823833 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.016 & 062 \\ -0.080 & 249 \end{bmatrix} (y_1 + h_1) + 20 \begin{bmatrix} 2.515 & 74 \\ 0.097 & 094 \end{bmatrix} (y_1 + h_1)^3 \quad (8)$$

$k = 0.0816$, $Q_3 = 1.9106378$ 时, 选 Q_3 为分叉参数, 系统 (6) 具有中心流形: $y_3 = h_1(y_1, y_2, _) = -0.7537122y_1 - 0.9905925y_2 + O(3)$, $y_4 = h_2(y_1, y_2, _) = 0.2585924y_1 + 1.55622y_2 + O(3)$; 中心流形上的流为

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3698419 \\ 0.3698419 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.012 & 988 \\ -0.059 & 863 \end{bmatrix} (y_1 + h_1 + h_2) + 20 \begin{bmatrix} 2.531 & 677 \\ -0.583 & 081 \end{bmatrix} (y_1 + h_1 + h_2)^3 \quad (9)$$

$_ = 0$ 时, 即在 3 个分叉点处, 所求得的 3 组中心流形均等于零, 即 $y_3 = y_4 = 0$, 且 (7~9) 式可写成统一形式

$$\dot{y}_1 = -ay_2 + 20by_1^3, \quad \dot{y}_2 = ay_1 + 20cy_1^3 \quad (10)$$

其中, 在 Q_1 处, $a = 0.5982162$, $b = -2.964942$, $c = 0.0682989$;

在 Q_2 处, $a = 0.3823833$, $b = 2.51574$, $c = 0.09709488$;

在 Q_3 处, $a = 0.3698419$, $b = 2.531677$, $c = -0.5830815$

3 分叉点类别的判定

对约化系统方程 (10), $(0, 0)$ 是其唯一有意义的平衡点, 显然它是相应的线性近似方程的中心. 这里需要说明的是, 由方程 (10), 当 a, c 异号时 (如在 Q_3 处), 还有另外 2 个非零平衡点: $\pm \left(\frac{a}{a/(20c)}, \frac{b}{a/(20c)} \right)$, 但它们并不满足方程 (2), 而是由于求解中心流形时只保留到二阶而引起的无意义的附加解. 这是因为系统 (2) 只有唯一的平衡点 $(0, 0, 0, 0)$, 本文采用的线性变换 $x = Py$ 绝不可能增加新的非零平衡点. 如求解中心流形时保留到三阶以上 (这将相当复杂), 则不可能得到这 2 个非零平衡点.

下面通过形式级数法判别 $(0, 0)$ 到底是系统 (10) 的中心还是焦点以及稳定性如何.

令 $F(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + F_3(y_1, y_2) + F_4(y_1, y_2) + \dots$, 其中 F_3, F_4 分别是关于 y_1, y_2 的三次, 四次齐次式. 由 (10) 式可得

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} \dot{y}_2 = \left[2y_1 + \frac{\partial F_3}{\partial y_1} + \frac{\partial F_4}{\partial y_1} + \dots \right] (-ay_2 + 20by_1^3) + \left[2y_2 + \frac{\partial F_3}{\partial y_2} + \frac{\partial F_4}{\partial y_2} + \dots \right] (ay_1 + 20cy_1^3) \quad (11)$$

令 (11) 式中的三次项为零, 即 $-ay_2 \frac{\partial F_3}{\partial y_1} + ay_1 \frac{\partial F_3}{\partial y_2} = 0$.

取极坐标 $y_1 = r \cos \theta$, $y_2 = r \sin \theta$, 则上式可化成 $r \cos \theta \frac{\partial F_3}{\partial y_2} - r \sin \theta \frac{\partial F_3}{\partial y_1} = 0$,

$$\text{即} \quad \partial F_3(r \cos \theta, r \sin \theta) / \partial \theta = 0 \quad (12)$$

因为 F_3 是关于 y_1, y_2 的三次齐次式, 故由 (12) 式可得

$$dF_3(\cos \theta, \sin \theta) / d\theta = 0 \quad (13)$$

由 (13) 式确定的 F_3 显然满足 $\int_0^{2\pi} \frac{dF_3}{d\theta} d\theta = 0$, 所以还需求 F_4 . 为此, 令 (11) 式中的四次项为零, 即 $a \left[y_1 \partial F_4 / \partial y_2 - y_2 \partial F_4 / \partial y_1 \right] + 40(b y_1 + c y_2) y_1^3 = 0$, 取极坐标, 则有

$$a \partial F_4 / \partial \theta + 40r^4 (b \cos \theta + c \sin \theta) \cos^3 \theta = 0 \quad (14)$$

因为 F_4 是关于 y_1, y_2 的四次齐次式, 故 $\partial F_4 / \partial \theta = r^4 dF_4 / d\theta$, 则 (14) 式可化为

$$dF_4 / d\theta = - (40/a) (b \cos \theta + c \sin \theta) \cos^3 \theta = 0 \quad (15)$$

由于 $\int_0^{2\pi} (b \cos \theta + c \sin \theta) \cos^3 \theta d\theta = \frac{3\pi}{4} \neq 0$, 所以改取 F_4 满足方程

$$dF_4 / d\theta = - (40/a) (b \cos \theta + c \sin \theta) \cos^3 \theta + C_4, \text{ 显然 } C_4 = 15b/a, \text{ 于是可得}$$

$$dF / dt = C_4 r^4 + O(r^5) = (15b/a) r^4 + O(r^5) \quad (16)$$

由 (16) 式可得: 若 $b/a < (>) 0$, 则 $(0, 0)$ 是稳定 (不稳定) 焦点; 若 $b/a = 0$, 则方程 (10) 以 $(0, 0)$ 为中心. 对方程 (10), 在 3 个分叉点处均有 $a > 0$, 所以 b 的符号决定了分叉点的性质. 很明显, 本文 3 个分叉点均不是中心, 其中 Q_1 点是稳定焦点, Q_2 与 Q_3 是不稳定焦点. 至此, 得到了约化系统 (10) 的分叉点的性质. 根据线性变换 $x = Py$ 以及 P 的性质不难推得, (y_1, y_2) 相平面的轨线即代表了 (x_1, x_2) , 亦即 (T, T) 相平面的轨迹. 可见, 上述求得的分叉点的性质代表了系统 (2) 中 (T, T) 相平面上的平衡点的性质.

参 考 文 献

- 1 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 1981. 38~ 56
- 2 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989. 111~ 119
- 3 Liu Jike, Zhao Lingcheng. Bifurcation analysis of airfoils in incompressible flow. Journal of Sound and Vibration, 1992, 154 (1): 117~ 124
- 4 Zhao Lingcheng, Yang Zhichun. Chaotic motions of an airfoil with nonlinear stiffness in incompressible flow. Journal of Sound and Vibration, 1990, 138 (2): 245~ 254
- 5 Carr J. Applications of centre manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981. 11~ 29

On Bifurcation Points of Airfoil Flutter with Cubic Nonlinearity

Liu Jike* Gao Lei

Abstract The properties of bifurcation points of airfoil flutter with cubic nonlinearity in incompressible flow are studied. The centre manifold theory is used to reduce dimensions of the system. As a result, the type and stability of the bifurcation points in the reduced 2-dimensional system can be determined by means of the formal series method.

Keywords airfoil flutter, bifurcation, centre manifold, formal series

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China