

关于覆盖式不分明紧性^{*}

邱道文

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 给出了不分明拓扑 (fts) 中覆盖式紧性的主要性质, 讨论了其与若干模糊紧性等价刻画.

关键词 不分明拓扑, 紧性, 弱诱导空间

分类号 O 159, O 189.1

由于紧性的重要性, 人们对 fts 中的紧性做了大量深入的工作. 王国俊^[1]用不分明网提出的良紧性是比较理想的一种. 在一般拓扑中, 紧性的覆盖式描述最简捷, 所以人们也关注如何较合理地建立 fts 中的覆盖式紧性. 应明生^[2]用包含度区分覆盖的层次, 提出了 (弱) f 紧性, 并得到 Tychonoff 定理. 值得指出的是, Lowen^[3]给出的 F 空间与 f 紧空间等价, 但对一般 F 集而言, 文 [3] 中的 F 紧集仅与文 [2] 中的弱 f 紧性等价 (命题 4). 然而弱 f 紧不满足 Tychonoff 定理 (例 1). 本文基于文 [2] 中的 f 紧性, 讨论了 f 紧性的一些重要性质和例子, 得到了几类空间中若干模糊紧性的等价刻画. 若无特别说明, 本文其它不分明紧性皆是文 [1] 中 $L = [0, 1]$ 意义下的.

例 1 $\mathcal{T}$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{T}_n = \left\{ A \mid 1 - \frac{1}{n} \mid A \in \mathcal{T} \right\}$ ($A \mid 1 - \frac{1}{n}$ 表示在 A 上取 $1 - \frac{1}{n}$, 在 A 外取 0 的 F 集), $\mathcal{T}_n = \mathcal{T} \cup \{\emptyset, \mathbf{R}^1\}$. 则 $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_n)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 fts 且任意 $x \in \mathbf{R}$, $(a, +\infty)$ 是 $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_n)$ 中的弱 f 紧但非 f 紧集^[2]. 若记 $\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R}$, 则易知 $\prod_{n=2}^{\infty} (a, +\infty)$ 不是积空间 $(\prod_{n=2}^{\infty} \mathbf{R}_\infty, \prod_{n=2}^{\infty} \mathcal{T}_n)$ 中的弱 f 紧子集. 这说明弱 f 紧性不满足 Tychonoff 乘积定理.

1 f 紧性与其它紧性的关系

F 单位区间 $I(I)$ ^[1] 在 fts 中有重要应用, 它是良紧的^[4]. 实际上, $I(I)$ 也是 f 紧空间.

命题 1 $I(I)$ 和 $I(I)^T$ 是 f 紧空间, T 为任意子标集.

证明 若 $I(I)$ 是 f 紧的, 则由文 [2] 中的 Tychonoff 定理得到 $I(I)^T$ 也是 f 紧的, 所以可仅证前者. 任取 $A, B \subset \mathbf{R}$, 令 $\mathcal{U} = \{l_a\}_{a \in A} \cup \{r_b\}_{b \in B}$. 若存在 $a \in A, a > 1$ 或存在 $b \in B, b < 0$, 取 $\{l_a\}$ 或 $\{r_b\}$, 则就有 $I(X, l_a) = 1$ 或 $I(X, r_b) = 1$, 而 $a < 0$ 时 $l_a \equiv 0$, $b > 1$ 时 $r_b \equiv 0$, 因此不妨设 $\sup A = 1$ 及 $\inf B \geq 0$. 此时 $I(X, \bigcup \mathcal{U}) \leq 1/2$. 事实上, 取 $\lambda(s) =$

* 收稿日期: 1997-09-08 邱道文, 男, 30 岁, 博士研究生

$$\begin{cases} 1 & s < 0 \\ T & 0 \leq s \leq 1, \text{ 则当 } a \in A \text{ 时, } l_a([\lambda]) = \sup \{1 - \lambda(s) \mid s < a\} \leq 1 - T; \text{ 当 } b \in B \text{ 时, } r_b([\lambda]) = \\ 0 & s > 1 \end{cases}$$

$$\sup \{\lambda(s) \mid s > b\} \leq T, \text{ 取 } T = 1/2, \text{ 得 } I(X \cup \mathcal{U}) \leq \max(1 - T, T) = 1/2. \text{ 可见 } I(X \cup \mathcal{U}) \leq 1/2 \text{ 成立. 故我们设 } I(X \cup \mathcal{U}) > t, t \in [0, 1/2), \text{ 得证}$$

$$\sup \{I(X \cup \mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathcal{U}\} > t \quad (1)$$

分 2 种情况讨论:

(1) $\sup A \leq \inf B$. 令 $\lambda(s) = \begin{cases} 0 & s > \inf B \\ 1 & s \leq \sup A \end{cases}$ 则 $a \in A$ 时 $l_a([\lambda]) = \sup \{1 - \lambda(s) \mid s < a\} = 0$, $b \in B$ 时 $r_b([\lambda]) = \sup \{\lambda(s) \mid s > b\} = 0$, 故 $I(X \cup \mathcal{U}) = 0$.

(2) $\sup A > \inf B$. 取 $a \in A$ 和 $b \in B$ 使 $\sup A > a > b > \inf B$. 若 $l_a([\lambda]) = \sup \{1 - \lambda(s) \mid s < a\} < t$, 则对任意 c , $a > c > b$, 因有 $1 - \lambda(c) < t$, 因而 $\lambda(c) > 1 - t$, 所以 $r_b([\lambda]) = \sup \{\lambda(s) \mid s > b\} > \lambda(c) > 1 - t$, 因此 (1) 式成立. 由文 [2] 中定理 2 知 $I(I)$ 是 f 紧的.

命题 2 设 $(X, \mathcal{T})$ 是弱诱导空间^[1], 若 $(X, \mathcal{T})$ 是弱 f 紧的, 则 $(X, [\mathcal{T}])$ 是紧的, 反之, 若 $(X, [\mathcal{T}])$ 是紧的, 则 $(X, \mathcal{T})$ 是 f 紧的.

证明 设 $\mathcal{U} \subset [\mathcal{T}]$ 且 $X = \bigcup \mathcal{U}$, 由已知 $(X, \mathcal{T})$ 是弱 f 紧的有 $\sup \{I(X \cup \mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{U}\} = 1$, 因而得有限子族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ 使 $X = \bigcup \mathcal{B}$. 反之, 若 $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ 且 $I(X, \bigcup \mathcal{U}) > t, t \in [0, 1)$, 则 $x \in X$ 时有 $U_x \in \mathcal{U}$ 使得 $U_x(x) > t$. 所以 $\{l(U_x)\}_{x \in X} \subset [\mathcal{T}]$ 且 $\{l(U_x)\}_{x \in X} = X$, 又因为 $(X, [\mathcal{T}])$ 是紧的, 所以存在有限点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使 $X = \bigcup_{i=1}^n \{l(U_{x_i})\}$. 因此 $I(X \cup \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}) > t$. 由 t 的任意性知 $I(X \cup \mathcal{U}) \leq \sup \{I(X \cup \mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{U}\}$.

命题 3 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 f ts, 则 A 是 $(X, \mathcal{T})$ 中的 f 紧集 $\Leftrightarrow A$ 为 $(X, \mathcal{T}_c)^{[4]}$ 中的 f 紧集.

证明 “ $\Leftarrow$ ” 显然, “ $\Rightarrow$ ” 利用文 [2] 中定理 2 证之, 此略.

命题 4 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 f ts, 则 $(X, \mathcal{T})$ 是 F 紧^[3] $\Leftrightarrow (X, \mathcal{T})$ 是 f 紧的; 若 A 是 X 的不分明子集, A 是 F 紧的^[3] $\Leftrightarrow$ 是弱 f 紧的.

定理 1 设 $(X, \mathcal{T})$ 是弱诱导空间, 则其① 弱 f 紧性; ② f 紧性; ③ 良紧性; ④ 超紧性; ⑤ 强 F 紧性; ⑥ F 紧性; ⑦ $(X, [\mathcal{T}])$ 是紧空间彼此等价.

证明 ③, ④, ⑤, ⑥ 等价性见文 [5]; ⑦ 与 ③ 等价见文 [1]. 又由命题 2 及 f 紧集是弱 f 紧集这一事实知 ①, ②, ⑦ 等价.

定理 2 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 空间, 则其超紧性、良紧性、强 F 紧性、 F 紧性与 f 紧性彼此等价.

证明 由文 [1] 知前 4 个条件等价. 又由命题 4 知 f 紧等价于 F 紧.

定理 3 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 空间, 则以下各条件等价: ① $(X, \mathcal{T})$ 是 f 紧的; ② $(X, \mathcal{T})$ 是良紧的; ③ $(X, \mathcal{T})$ 是超 F 紧的; ④ $(X, \mathcal{T}_c)$ 是弱诱导的; ⑤ $(X, \mathcal{T}_c)$ 是 Hausdorff 的.

证明 由定理 2 知 ①②③ 等价, 据文 [6] 中定理 5 知: ② 蕴含 ③④⑤ 等价.

2 f 紧的性质

定理 4 设 $(X, \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 的 f ts, A, B 为其弱 f 紧子集且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\sup\{I(A, U) \Delta I(B, V) \mid U, V \in \mathcal{T}, U \cap V = \emptyset\} = 1$$

证明 设 $y \in B$, $x \in A$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda < 1$. 因为 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $x \neq y$. 又因 $(X, \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 的, 故有开集 $G(x, \lambda)$ 和 $H(x, \lambda)$, 使得 $G(x, \lambda) \cap H(x, \lambda) = \emptyset$ 且 $G(x, \lambda)(x) \geq \lambda$, $H(x, \lambda)(y) \geq \lambda$. 记 $A_1 = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$, $B_1 = \{x \in X \mid B(x) = 1\}$. 因此若 $y \in \text{supp } B$ 且当 $y \in B_1$ 时, 取 $\lambda(y) = B(y)$, $y \in B_1$ 时 $\lambda(y) < 1$, 则有

$$A \cup \left\{ G(x_{A(x)}, \lambda(y)) \mid x \in \text{supp } A \setminus A_1 \right\} \cup \left\{ G(x_{1-\frac{1}{n}}, \lambda(y)) \mid x \in A_1, n > 1 \right\}$$

因为 A 是弱 f 紧的, 所以 $\forall \lambda > 0$ 存在有限点集 $\{x_1, x_2, \dots, x_{m(\lambda(y))}\} \subset \text{supp } A$, 且每个 x_i 对应一有限数集 $R_{x_i} = \{j_1, j_2, \dots, j_{k(x_i)}\} \subset (0, 1)$ (注意 $i \neq j$ 时 R_{x_i} 与 R_{x_j} 可能不相交), 使得

$$I\left(A, G(\lambda(y))\right) > 1 - \lambda \quad (2)$$

$G(\lambda(y)) = \bigcup \left\{ G(x_i, \lambda(y)) \mid i = 1, 2, \dots, m(\lambda(y)) \right\}$, 且当 $x \in A_1$ 时, $\lambda(x) = A(x)$; 否则 $\lambda(x) \in R_{x_i}$

令 $H(\lambda(y)) = \bigcap \left\{ H(x_i, \lambda(y)) \mid i = 1, 2, \dots, m(\lambda(y)) \right\}$ 且 $x \in A_1$ 时 $\lambda(x) = A(x)$; 否则 $\lambda(x) \in R_{x_i}$, 则 $\lambda(y) \in H(\lambda(y))$

且 $G(\lambda(y)) \cap H(\lambda(y)) = \emptyset$ (3)

另一方面, 因 $B \cup \left\{ H(y_{B(y)}, \lambda(y)) \mid y \in \text{supp } B \setminus B_1 \right\} \cup \left\{ H(y_{1-\frac{1}{n}}, \lambda(y)) \mid y \in B_1, n \in \mathbb{N}, n > 1 \right\}$, 又由于 B 是弱 f 紧的, 所以存在有限点集 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \text{supp } B$ 且每个 y_i 对应一数集 $R_{y_i} = \{s_1, s_2, \dots, s_{p(y_i)}\} \subset (0, 1)$, 使得 $I(B, V) > 1 - \lambda$, $V = \bigcup \left\{ H(y_i, \lambda(y_i)) \mid i = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } y_i \in B_1 \text{ 时 } \lambda(y_i) = B(y_i); \text{ 否则 } \lambda(y_i) \in R_{y_i} \right\}$. 现令 $U = \bigcap \left\{ G(y_i, \lambda(y_i)) \mid i = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } y_i \in B_1 \text{ 时 } \lambda(y_i) = B(y_i); \text{ 否则 } \lambda(y_i) \in R_{y_i} \right\} \triangleq \bigcap \mathcal{A}$, 则由式 (2) 知 $I(A, U) = \inf \left\{ I\left(A, G\left(\lambda(y_i)\right)\right) \mid G\left(\lambda(y_i)\right) \in \mathcal{A} \right\} > 1 - \lambda$. 据 (3) 式得 $U \cap V = \emptyset$ 且 $U, V \in \mathcal{T}$.

定理 5 设 $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ 是 fts, f 是 $(X, \mathcal{T})$ 到 $(Y, \mathcal{U})$ 的连续映射. 若 A 为 X 的 f 紧子集, 则 $f(A)$ 为 f 紧子集.

证明 设 $B \in \mathcal{U}$ 且 $I(f(A) \cup B) > t$, $t \in [0, 1)$, 则易知 $I(A \cup \mathcal{A}) > t$, $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$. 因 A 是 f 紧的, 故存在 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B}$ 使得

$$I\left(A \cup \left\{ f^{-1}(B_i) \mid i = 1, 2, \dots, n \right\}\right) > t \quad (4)$$

断言 $I(f(A) \cup \bigcup_{i=1}^n B_i) > t$. 事实上, 任取 $y \in Y$, 不妨设 $y \in f(x)$, 当 $x \in f^{-1}(y)$ 时, 由式 (4) 知有 $B_{i(x)} \in \mathcal{B}$ 使得 $1 - A(x) + f^{-1}(B_{i(x)}) > t$, 即 $1 - A(x) + B_{i(x)}(y) > t$. 若令 $B_{i(y)}(y) = \max \{B_{i(x)}(y) \mid x \in f^{-1}(y)\}$, 则 $x \in f^{-1}(y)$ 时 $1 - A(x) + B_{i(y)}(y) > t$. 因此 $1 - \sup \{A(x) \mid f(x) = y\} + B_{i(y)}(y) \geq t$, 故断言成立. 由 t 的任意性知结论成立.

定理 6 (Wallace) 设 $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ 是 fts, $A \subset X$, $B \subset Y$, $\lambda \in (0, 1]$. 若 A_λ , B_λ 是 f 紧的, 则 $X \times Y$ 中的任意开集 W 有

$$I(A \times B, W) \leq \sup \{I(A, U) \Delta I(B, V) \mid U \times V \subset W, U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{U}\}$$

证明 设 $W = \bigcup_{s \in S} (U_s \times V_s)$, S 为指标集, U_s 和 V_s 为开集. 若 $I((A \times B, W) > t$, $t \in [0, 1)$, 则 $(x, y) \in A \times B$ 时, 存在 $U_{s(x,y)} \in \mathcal{T}$ 和 $V_{s(x,y)} \in \mathcal{U}$ 使 $1 - \lambda + U_{s(x,y)}(x) \Delta V_{s(x,y)}(y) > t$. 故 $I\left(A \cup \left\{ U_{s(x,y)} \mid x \in A \right\}\right) > t$. 由于 A 是 f 紧的, 所以存在 $\{x_1, x_2, \dots, x_{m(y)}\} \subset A$, 使 $I\left(A \cup \left\{ U_{s(x_i,y)} \mid i = 1, 2, \dots, m(y) \right\}\right) > t$.

令 $G(y) = \bigcup \left\{ U_{s(x_i, y)} \mid i = 1, 2, \dots, m(y) \right\}$
 $H(y) = \bigcap \left\{ V_{s(x_i, y)} \mid i = 1, 2, \dots, m(y) \right\}$
 则 $G(y) \times H(y) \subset \bigcup \left\{ U_{s(x_i, y)} \times V_{s(x_i, y)} \mid i = 1, 2, \dots, m(y) \right\} \subset W$ 及 $I(A, G(y)) > t$, $H(y)(y) > t - 1 + \lambda$. 另一方面, 由 B_λ 的 f 紧性和 $I(B_\lambda \cup \{ H(y) \mid y \in B \}) > t$ 可知存在 $\{y^1, y^2, \dots, y^n\} \subset B$ 使 $I(B_\lambda \cup \{ H(y_i) \mid i = 1, 2, \dots, n \}) > t$. 因此, 若令 $V = \bigcup_{i=1}^n H(y_i)$, $U = \bigcap_{i=1}^n G(y_i)$ 则

$$U \times V = \left(\bigcap_{i=1}^n G(y_i) \right) \times \left(\bigcup_{i=1}^n H(y_i) \right) \subset \bigcup_{i=1}^n \left(G(y_i) \times H(y_i) \right) \subset W$$

综上所述, $I(A \times B_\lambda, U \times V) > t$, $U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{U}$, 可见定理成立.

类似于定理 6, 我们可推广经典拓扑学中由 Frolik 和 Lin 建立的 1 个定理. 其证明方法也类似于定理 6, 此略.

定理 7 $(X_s, \mathcal{T}_s)$ 是 f ts 簇, $s \in S$, $A \subset X_s$, $\lambda \in (0, 1]$, A^λ 是 f 紧的, $A = \prod_{s \in S} A^\lambda$, 若 W 是积空间 $\prod_{s \in S} X_s$ 的开集, 则

$$I(A, W) \leq \sup \left\{ \inf_{s \in S} I(A^\lambda, U_s) \mid s \in S, U_s \in \mathcal{T}_s, \text{开集 } \prod_{s \in S} U_s \subset W \right\}.$$

参 考 文 献

- 1 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988. 244~ 309
- 2 应明生. 不分明拓扑中的一种覆盖式紧性. 数学学报, 1994, 37 (6): 852~ 856
- 3 Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. J Math Anal Appl, 1976, 56 (3): 621 ~ 633
- 4 刘应明, 罗懋康. 不分明单位区间的良紧性. 科学通报, 1986, 31 (23): 1765~ 1767
- 5 孟培源, 周武能. L-fuzzy 拓扑空间若干紧性概念的等价性. 数学研究与评论, 1992, 12 (4): 513 ~ 518
- 6 彭育威. Hausdorff 良紧空间是超紧的充要条件. 数学研究与评论, 1992, 12 (4): 509~ 512

On the Fuzzy Compactness of Cover-Style

Qiu Daowen*

Abstract Properties of compactness of cover-style in fuzzy topology and relations with other kinds of fuzzy compactness are established.

Keywords fuzzy topology, compactness, weakly induced space

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China