

一类振荡模型的摄动增量法

胡 敏¹⁾ 刘浪环²⁾ 黄 颀³⁾

(1) 中山大学计算机科学系, 广州 510275;

2) 太平建筑总公司设计室; 3) 中山大学力学系)

摘 要 用摄动增量法求解一类三极管振荡器自激振荡器的振幅、频率、相轨并给出相图.

关键词 自激振荡, 摄动增量法

分类号 O 322

振荡回路是重要的模拟与数字电路之一^[1]. 其自激振荡全过程的分析, 必须考虑非线性特性. 而一旦涉及非线性问题, 数学分析就显得困难. 但是如果只讨论自激条件, 即振荡器由不振荡到刚开始振荡的一小段范围, 仍可以把振荡器当成线性系统来处理, 从而简化自激条件的推导, 并具有相当的精度. 然而必须注意线性近似下所得到的自激条件只能解释振荡器的起振, 不能解释振幅的建立和稳定的全过程. 为方便起见, 本文先叙述一类三极管振荡器的非线性近似模型^[2]; 再叙述该类模型的 1 种高精度的近似解法——简化的摄动增量法^[3]; 最后给出该系统 4 种参数取值的振幅、瞬时频率、相轨的近似表达式及相图.

1 一类三极管振荡器的数学模型

三极管振荡器如图 1 所示. 由于串联于集电极回路中的 LC 回路与基极回路之间互感 M 的存在, 使回路产生自激振荡.

设 LC 回路的电感 L , 电容 C 与电阻 R 中通过的电流分别为 i_L , i_C , i_R . 设 E_a 为集电极回路中的电势, V_a , V_g 分别是集电极及基极电压, i_a 为集电极电流, M 为基极回路与 LC 回路之间的互感系数. 由于基极电流很小, 忽略不计, 则上述各量之间满足

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt = R i_R = E_a - V_a \\ M \frac{di_L}{dt} &= V_g, \quad i_a = i_L + i_R + i_C \end{aligned} \quad (1)$$

经一系列的变量替换及数学处理, 可得图 1 所示的三极管振荡器自激振荡的数学模型^[2]

$$\frac{d^2 x}{df^2} + x = \left(1 - x^2 \right) \frac{dx}{df} \quad (2)$$

2 摄动增量法

方程 (2) 中, 当 $x \ll 1$ 时, 经典的摄动法可给出较良好的近似解. 当 x 较大, 比如接近

1 时, 经典摄动法的误差很大 (见图 2a). 当 $X \ll 1$ 时, 经典摄动法不适用. 注意到系统 (2) 的特点, 本文对摄动增量法进行简化, 叙述如下: 引进非线性时间变换 $h = h(f)$, 满足 $\frac{dh}{df} = k(h)$, $k(h) = k(h + 2\pi) = k(h)$.

记 $g(x, x') = (1 - x^2) \frac{dx}{df}$, $x' = \frac{dx}{df}$, $x = a \cos h$

其中, $a > 0$ 是系统的振幅, h 是相角, $k(h)$ 是瞬时频率. 微分方程 (2) 可变为

$$\frac{1}{2} (k \sin h)^2 + \frac{w(a \cos h) - w(a)}{a^2} = \int_0^h g(a \cos \theta, -a k(\theta) \sin \theta) k(\theta) \sin^2 \theta d\theta \quad (3)$$

其中, $w(x) = \int_0^x u du = \frac{1}{2} x^2$, 取 $h = 2\pi$, 代入式 (3), 得

$$\int_0^{2\pi} g(a \cos \theta, -a k(\theta) \sin \theta) k(\theta) \sin^2 \theta d\theta = 0 \quad (4)$$

摄动增量法分 2 步进行:

1) 设 $X \approx 0$ 时, 方程 (3), (4) 的解表示为 $a \approx a_0$, $k(h) \approx k_0(h)$, 其中, a_0 及 $k_0(h)$ 由下式确定

$$k_0(h) = \frac{2[w(a_0) - w(a_0 \cos h)]}{a_0^2 \sin^2 h} \left| \int_0^{2\pi} g(a_0 \cos \theta, -a_0 k_0 \sin \theta) k_0 \sin^2 \theta d\theta = 0 \right.$$

系统 (2) 的零阶近似相轨为

$$x = a_0 \cos h, x' = -a_0 k_0(h) \sin h$$

2) 设 $X \Delta X$ ($0 < \Delta X$) 时, 系统 (2) 的振幅和频率的增量分别为 Δa 和 Δk , 即式 (3), (4) 的解为 $a = a_0 + \Delta a$, $k = k_0 + \Delta k$.

将式 (3), (4) 在 $a = a_0$ 及 $k = k_0$ 附近展开为 Taylor 级数, 并忽略 Δa 及 Δk 的二阶以上的项, 得线性增量方程

$$\left[\left(\frac{\partial w}{\partial a} \right)_0 - \int_0^h \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 d\theta \right] \Delta a + \left(k_0 \sin^2 h \right) \Delta k - \int_0^h \left(\frac{\partial F}{\partial k} \right)_0 \Delta k d\theta = -\frac{1}{2} (k_0 \sin h)^2 - W(a_0, h) + \int_0^h F(a_0, k_0, \theta) d\theta \quad (5)$$

$$\Delta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 d\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial k} \right)_0 \Delta k d\theta = - \int_0^{2\pi} F(a_0, k_0, \theta) d\theta \quad (6)$$

其中, $w = w(a, h) = [w(a \cos h) - w(a)] / a^2$

$$F = F(a, k, \theta) = g(a \cos \theta, -a k \sin \theta) k \sin^2 \theta$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial a} \right)_0 = \frac{\partial w}{\partial a} \Big|_{a=a_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 = \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{a=a_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial k} \right)_0 = \frac{\partial F}{\partial k} \Big|_{k=k_0}$$

将 k_0 , Δk , $F(a_0, k_0, h)$, $(\partial F / \partial a)_0$, $(\partial F / \partial k)_0$, $k_0 \sin^2 h$, $1/2 (k_0 \sin h)^2$ 分别展开为傅氏级数, 并代入方程 (5), (6), 利用谐波平衡原理, 可得以 Δa 及 Δk 的傅氏级数为独立未知量的线性代数方程组

$$A_n \Delta a + A_n \Delta P_0 + \sum_{j=1}^M (A_{n,j} \Delta P_j + B_{n,j} \Delta Q_j) = R_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 2M+1) \quad (7)$$

式中, R_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2M$) 是方程 (5) 右端函数的傅氏级数的 cosine 和 sine 项的系数.

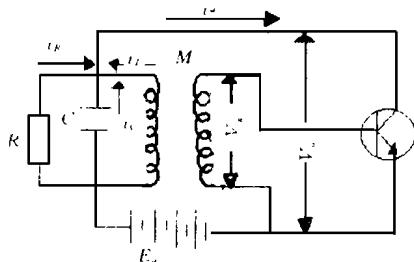


图 1 三极管振荡器

Fig. 1 The triode oscillator

R_{2M-1} 是方程 (6) 右端项的值. 可见, $R_n (n= 0, 1, 2, \cdots, 2M-1)$ 是避免增量过程偏离实际解的余项. 具体求解过程如下:

1) 取参数 $X=\Delta X$ 由方程组 (7) 求出 $\Delta a, \Delta P_i, \Delta Q (i= 0, 1, \cdots, M)$, 于是可得 $a= a_0+\Delta a, k= k_0+\Delta k$ 再把上述的 a, k 当作初值, 进行下 1 次迭代, 不断修改 a 及 k , 直至对所有 n , 都有 $R_n \rightarrow 0$ (或 $|R_n|$ 小于所需的精度).

2) 取 $X= k\Delta X (k= 2, 3, \cdots)$, 重复上述步骤, 直至 $X= X$ 为止, 即可得到系统 (2) 的相轨. 频率和周期的近似表达式

$$x= a\cos h, \dot{x}= -a\sin h, k= P_0+\sum_{j=1}^M(P_j\cos jh+Q_j\sin jh)T=\int_0^{\frac{2\pi}{k(h)}}\frac{dh}{k(h)}$$

3 数值结果

易知, 系统 (2) 的零阶近似解中, $a= 2, k_0= 1$ 相轨为 $x= 2\cos h, \dot{x}= -2\sin h$ 此为半径为 2 的圆.

1) 当 $X< 1$ 时, 只要取很小的 M , 比如 $M= 4$, 解答便很快收敛. 有关数据在此不详细列出.

2) $X= 1$ 时, 取 $M= 6$. 算得 $a= 2.008\ 6, P_i, Q (i= 0, 2, 4, 6)$ 如表 1.

于是, 自激励振荡系统 (2) 的相轨和频率可表为

$$\begin{aligned} x&= 2.008\ 6\cos h, \quad \dot{x}= -2.008\ 6k(h)\sin h \\ k(h)&= 1.062\ 47-0.040\ 38\cos 2h-0.495\ 25\sin 2h-0.021\ 85\cos 4h- \\ &\quad 0.001\ 07\sin 4h-0.000\ 59\cos 6h-0.002\ 37\sin 6h \end{aligned}$$

可见, 非线性系统的频率是瞬变的. 相图见图 2 (a).

3) $X= 10$ 时, 取 $M= 20$, 算得振幅 $a= 2.013\ 5, P_i, Q_i (i= 0, 2, 4, \cdots, 20)$ 见表 2, 相图见图 2 (b).

表 2 $X= 10$ 时 $k(h)$ 的 Fourier 系数
Tab. 2 Fourier coefficients of $k(h)$ for $X= 10$

i	P_i	Q_i	i	P_i	Q_i	i	P_i	Q_i
0	3.441 45	0	8	-0.065 97	-0.027 82	16	-0.004 68	-0.009 68
2	-1.005 81	-4.309 65	10	-0.051 31	-0.019 60	18	0.000 31	-0.008 04
4	-0.900 18	0.210 13	12	-0.021 43	-0.024 95	20	0.002 31	-0.002 48
6	-0.234 34	-0.123 67	14	-0.006 84	-0.013 50			

4) $X= 50$ 时, 取 $M= 50$, 算得系统的振幅 $a= 2.002\ 72, P_i, Q_i (i= 0, 2, 4, \cdots, 50)$ 见表 3. 相图见图 2c.

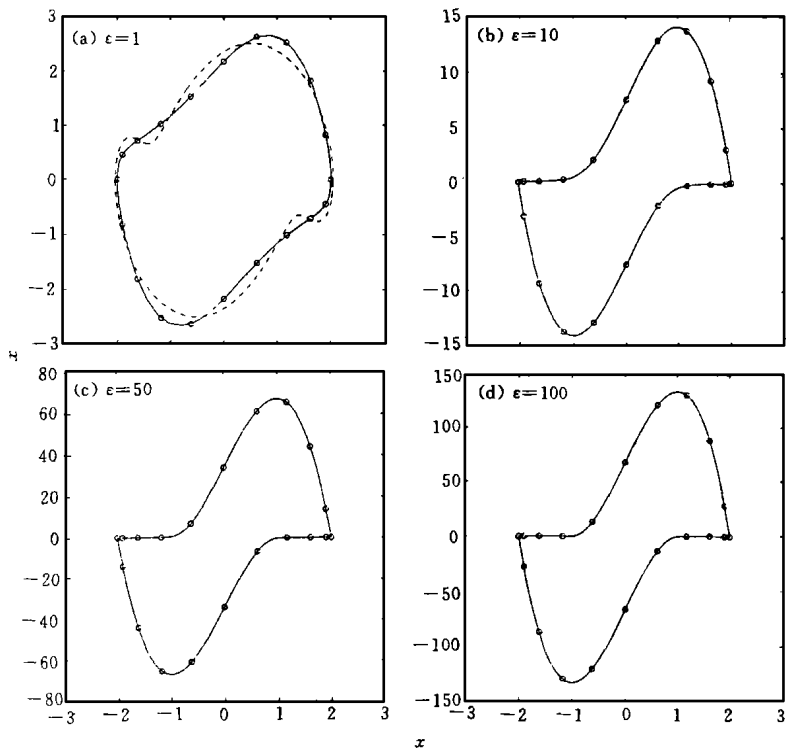


图 2 系统 (2) 的相图

Fig. 2 Prase diagram of system (2)

——数值积分法 KBM法 ° 本文简化摄动增量法

表 3 $\mathbb{X}=50$ 时 $w(h)$ 的 Fourier系数
Tab. 3 Fourier coefficients of $k(h)$ for $\mathbb{X}=50$

i	P_i	Q_i	i	P_i	Q_i	i	P_i	Q_i
0	15.538 69	0	18	- 0.106 37	- 0.034 80	36	- 0.009 06	- 0.010 28
2	- 5.177 60	- 20.796 42	20	- 0.070 70	- 0.016 69	38	- 0.006 01	- 0.007 65
4	- 5.079 01	1.478 20	22	- 0.065 10	- 0.014 99	40	- 0.005 28	- 0.006 82
6	- 1.529 07	- 0.532 07	24	- 0.046 58	- 0.021 56	42	- 0.002 79	- 0.006 52
8	- 0.533 78	0.028 58	26	- 0.032 71	- 0.014 26	44	- 0.001 30	- 0.004 33
10	- 0.510 24	0.031 59	28	- 0.029 62	- 0.012 98	46	- 0.001 27	- 0.003 59
12	- 0.293 65	- 0.080 77	30	- 0.021 31	- 0.014 88	48	0.000 25	- 0.003 12
14	- 0.168 37	- 0.014 14	32	- 0.015 02	- 0.011 00	50	0.000 93	- 0.000 97
16	- 0.157 74	- 0.011 82	34	- 0.013 37	- 0.009 99			

5) $\mathbb{X}=100$ 时, 取 $M=50$, 算得振幅 $a=2.000\ 98$, $P_i, Q_i (i=0, 2, 4, \cdots 50)$ 如表 4. 相图见图 2 (d).

表 4 $X=100$ 时 $k(h)$ 的 Fourier 系数
Tab. 4 Fourier coefficients of $k(h)$ for $X=100$

i	P_i	Q_i	i	P_i	Q_i	i	P_i	Q_i
0	30.849 03	0	18	- 0.220 89	- 0.069 38	36	- 0.020 15	- 0.020 95
2	- 10.284 34	- 41.466 58	20	- 0.144 05	- 0.023 60	38	- 0.012 76	- 0.014 43
4	- 10.213 84	3.014 84	22	- 0.139 58	- 0.025 71	40	- 0.124 5	- 0.012 88
6	- 3.084 68	- 1.072 12	24	- 0.098 30	- 0.042 89	42	- 0.006 72	- 0.013 51
8	- 1.066 88	0.083 39	26	- 0.067 40	- 0.024 34	44	- 0.002 90	- 0.008 52
10	- 1.049 25	0.086 02	28	- 0.064 97	- 0.022 49	46	- 0.003 36	- 0.006 96
12	- 0.601 01	- 0.162 08	30	- 0.045 89	- 0.029 89	48	- 0.000 01	- 0.006 62
14	- 0.339 57	- 0.014 44	32	- 0.031 36	- 0.019 88	50	0.001 87	- 0.002 14
16	- 0.331 28	- 0.012 00	34	- 0.030 18	- 0.018 22			

以上结果表明：摄动增量法十分有效，且精度良好；此外，摄动增量法所提供的高精度的相轨及频率的表达式，对人们进一步研究非线性电路的频谱变换，比如各种波形的产生、调制、变频、检波、同步等等，将是个促进。有学者^[1]预言：“随着对电子技术的深入了解，将会对线性系统及非线性系统的特性和分析方法有更多的理解”。10多年来，诸如摄动增量法等这些关于非线性系统的新成果，必将是对电子技术进步的裨益。

参 考 文 献

1 彭龙商, 邓亚美, 姚长安. 模拟与数字电路. 成都: 四川科学技术出版社, 1984. 343~ 378
2 前成一郎. 非线性振动概论. 力学译丛, 1974, 5 1~ 19
3 Chan H S Y, Chung K W, Xu Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators. Int J Non-Linear Mech, 1996, 31 59~ 72

The Perturbation-Incremental Method for An Oscillation Model

Hu Min* Liu Langhuan Huang Chengbiao

Abstract The perturbation-incremental method is applied to solve a self-oscillation model of a triode oscillator. The amplitudes, frequencies, phase orbits and phase diagrams are given for several parametric values.
Keywords self-oscillation, perturbation-incremental method

* Department of Computer Sciences, Zhongshan University, Guangzhou 510275.
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net