

# 时滞 Ljé nard 型方程的周期解<sup>\*</sup>

彭世国

朱思铭

(广东工业大学数理系, 广州 510090) (中山大学数学系)

**摘 要** 运用重合度理论讨论具有周期扰动项的  $n$  维时滞 Ljé nard 型方程  $\ddot{x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \dot{x} + g(t, x_t) = p(t)$  的周期解问题, 得到了有关周期解的存在性的新结果.

**关键词** 非线性方程, 时滞型, 周期解

**分类号** O 175. 12

非线性 Ljé nard 型方程的周期解问题一直受到人们的热切关注, 它有着广泛的应用背景 (如电讯工程中的强迫振荡, 机械振动). 本文讨论具有周期扰动项的  $n$  维 Ljé nard 型方程

$$\ddot{x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \dot{x} + g(t, x_t) = p(t) \quad (1)$$

的周期解的存在性. 其中,  $F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ ,  $g \in C^2(\mathbf{R} \times C_f, \mathbf{R}^n)$ ,  $C_f = C([-f, 0], \mathbf{R}^n)$ ,  $x \in C_f$ ,  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $g$  关于第一变元  $t$  是  $w$  周期的,  $p \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ ,  $p(t + w) \equiv p(t)$ ,  $\int_0^w p(t) dt = 0$ ,  $w > 0$ ,  $f \geq 0$ .

近年来, 随着泛函分析工具的引入, 对于 Ljé nard 型常微分系统  $\ddot{x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \dot{x} + g(x) = p(t)$  的周期解的存在性得到了一些很好的结果<sup>[1, 2]</sup>. 但对于具有时滞的 Ljé nard 型系统的周期解的存在性, 这方面的结果不多见. 文 [3, 4] 的结果对于判定如下的 Ljé nard 型方程

$$\ddot{x} + \frac{X}{(1 + x^2)^{3/2}} \dot{x} + X(t - \pi) e^{x(t - \pi)} + X \sin t \cdot e^{-\sin t} = X \frac{\cos t}{(1 + \sin^2 t)^{3/2}} - \sin t \quad (2)$$

是无效的. 本文的目的是运用 Mawhin 的重合度理论讨论方程 (1) 的周期解问题. 得到的结果, 对于判定类似方程 (2) 的一类指数型方程的周期解的存在性是方便的, 同时对于判定拟线性方程<sup>[4]</sup>的周期解的存在性是有效的, 从而扩充了文 [3, 4] 中已有的结果.

## 1 引理及记号

设  $X, Z$  为赋范线性空间,  $L: \text{dom} L \subset X \rightarrow Z$  是指标为零的线性 Fredholm 算子,  $N: X \rightarrow Z$  为连续非线性算子, 则存在连续投影  $P: X \rightarrow X$ ,  $Q: Z \rightarrow Z$  使得  $\text{Im} P = \text{Ker} L$ ,  $\text{Im} L = \text{Ker} Q$ , 进一步有  $L: \text{dom} L \cap \text{Ker} P \rightarrow \text{Im} L$  是可逆的, 用  $K$  表示其逆算子. 设  $K$  是  $X$  中的有界开集, 如果  $QN(K)$  有界, 且  $K(I - Q)N: K \rightarrow X$  是有界的, 则称  $N$  在  $K$  上  $L$  紧的. 令  $J:$

\* 国家自然科学基金 (19771089) 和国家教委博士点基金 (9355810) 资助项目

收稿日期: 1998-04-01 彭世国, 男, 31 岁, 博士, 讲师

$\text{Im}Q \rightarrow \text{Ker}L$  为一个同构, 设  $M: \mathbb{K} \rightarrow X$ ,  $M = P + JQN + K(I - Q)N$ , Mawhin<sup>[5]</sup> 定义了重合度  $d[(L, N), K] = \deg(I - M, K, 0)$ . 文 [6] 在文 [5] 的基础上得到了如下引理

引理 1<sup>[6]</sup> 设 ①  $K$  是连续的且  $N, H$  在  $\mathbb{K}$  上是  $L$  紧的; ② 存在连续泛函  $V: Z \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{Im}L \subset \text{Ker}V$ , 存在常数  $T_1, T_2, U_1, U_2 \geq 0$ , 使得

$$|Nx| \leq V(Nx) + T_1|x| + U_1, x \in X,$$

$$|Hx| \leq V(Hx) + T_2|x| + U_2, x \in X;$$

③ 方程  $\lambda QNx + (1 - \lambda)QHx = 0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  的每一可能的解满足

$$|Px| \leq (I - P)x + r, r \geq 0, r > 0;$$

④  $d[(L, H), B_X(s)] \neq 0, s \geq r$ . 其中,  $B_X(s)$  是  $X$  中的球心在零点, 半径为  $s$  的开球. 则存在  $T_0 > 0$ , 使得只要  $T_1 + T_2 \leq T_0$ , 方程  $Lx = Nx$  在  $\mathbb{K}$  中至少有一解.

对任意  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in (\mathbb{R}^n)$ , 定义其模  $|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ . 对任意  $n \times n$  方阵  $A = (a_{ij})$ , 定

义其模  $\|A\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ . 本文中总取  $X = \{x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) | x(t) = x(t + w)\}$ ,  $Z = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) | x(t + w) = x(t)\}$ , 对  $x \in X$ , 定义其范数为  $\|x\| = \max_{t \in [0, w]} |x(t)|$ ,  $\sup_{t \in [0, w]} |\dot{x}(t)|$ , 对  $z \in Z$ , 定义其范数  $\|z\| = \int_0^w |z(t)| dt$ . 则  $X, Z$  均为赋范线性空间. 另外, 对  $h \in C^1$ , 定义  $\|h\| = \sup_{t \in [0, 1]} |h(t)|$ .

## 2 主要结果

定理 1 对方程 (1), 假设如下条件满足

① 存在  $b > 0$ , 对任意  $x \in \mathbb{R}^n$  有  $\left\| \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \right\| \leq b$ ;

②  $g$  将有界集映为有界集, 且存在  $T \in \mathbb{R}^+$ ,  $\delta > 0$  及连续函数  $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , 使得  $|g(t, h)| \leq \langle T, g(t, h) \rangle + \delta \|h\| + U(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , 其中,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的内积;

③ 存在  $r > 0$ , 使得对所有满足  $\int_0^w |x(t)| dt \geq r$  的  $x \in Z$ , 有  $\int_0^w g(t, x_t) dt \neq 0$ ;

④  $\deg(g^0, B_{\mathbb{R}^n}(s), 0) \neq 0$ , 其中,  $g^0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g^0(a) = \frac{1}{w} \int_0^w g(s, a) ds, s \geq r$ .

则存在  $T_0 > 0$ , 使得只要  $(b + 2\delta) < T_0$ , 方程 (1) 至少存在一个  $w$  周期解.

证明 令  $L: \text{dom}L \subset X \rightarrow Z$  为  $Lx = -\ddot{x}$ ,  $N: X \rightarrow Z$  为  $Nx = \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \dot{x} + g(t, x_t) - p(t)$ , 则不难验证  $L$  是指标为零的 Fredholm 算子, 对于  $X$  中有任一有界开集  $K$ ,  $N$  在  $K$  上是  $L$  紧的, 并且有  $\text{Ker}L = \mathbb{R}^n$ , 定义投影算子  $P, Q$  如下: 对  $x \in X$ ,  $Px = \frac{1}{w} \int_0^w x(t) dt$ , 对  $z \in Z$ , 定义  $Qz = \frac{1}{w} \int_0^w z(t) dt$ . 定义线性泛函  $V: Z \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V(z) = \langle T, \frac{1}{w} \int_0^w z(t) dt \rangle, z \in Z$ . 显然有  $\text{Im}L \subset \text{Ker}V$ .

故  $|Nx| = \frac{1}{w} \int_0^w |Nx| dt = \frac{1}{w} \int_0^w \left| \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \dot{x} + g(t, x_t) - p(t) \right| dt \leq \frac{1}{w} \int_0^w \left| \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \dot{x} \right| dt + \frac{1}{w} \int_0^w |g(t, x_t)| dt + \frac{1}{w} \int_0^w |p(t)| dt \leq$

$$b\|x\| + \frac{1}{w} \int_0^w |g(t, x_t)| dt + \frac{1}{w} \int_0^w |p(t)| dt$$

$$V(Nx) = \langle T, \frac{1}{w} \int_0^w Nx dt \rangle = \langle T, \frac{1}{w} \int_0^w g(t, x_t) dt \rangle$$

由条件②可知

$$\frac{1}{w} \int_0^w |g(t, x_t)| dt \leq \frac{1}{w} \int_0^w \langle T, g(t, x_t) \rangle dt + \frac{X}{w} \int_0^w \|x_t\| dt + \frac{1}{w} \int_0^w U(t) dt$$

$$V(Nx) + X\|x\| + \frac{1}{w} \int_0^w U(t) dt$$

故  $\|Nx\| \leq V(Nx) + T\|x\| + U$ .

其中,  $T = b + X, U = \frac{1}{w} \int_0^w |p(t)| dt + \frac{1}{w} \int_0^w U(t) dt$ .

令  $Hx(t) = \frac{1}{w} \int_0^w g(t, x_t) dt = QNx(t)$

$$\|Hx\| \leq \frac{1}{w} \int_0^w |g(t, x_t)| dt \leq V(Hx) + X\|x\| + \frac{1}{w} \int_0^w U(t) dt$$

$$V(Hx) + T\|x\| + U$$

其中,  $T = X, U = \frac{1}{w} \int_0^w U(t) dt$ . 于是引理 1 条件② 满足.

对于方程  $(1-\lambda)QNx + \lambda QHx = (1-\lambda)QNx + \lambda Q^2Nx = QNx = 0$  的解  $x \in X$ , 由条件③

知, 必存在  $\epsilon \in [0, w]$ , 使  $|x(\epsilon)| < r$ , 由  $Px$  为常值映射, 故  $\|Px\| = |Px(\epsilon)|$ , 而

$$|x(\epsilon)| = |Px(\epsilon) + (I-P)x(\epsilon)| \geq |Px(\epsilon)| - |(I-P)x(\epsilon)|,$$

$$\|Px\| \leq |x(\epsilon)| + |(I-P)x(\epsilon)| \leq r + \|(I-P)x\|$$

从而引理 1 条件③ 满足.

考虑方程  $Lx = Hx$ , 由于  $\text{Im} L = \text{Ker} Q, H = QN$ , 方程  $Lx = Hx$  等价于

$$QNx = 0, Lx = (I-Q)QNx = 0$$

即  $QNx = 0$ , 且  $x \in \text{Ker} L$ , 从而由条件③ 可知, 当  $x \in \text{Ker} L \cap \partial B_X(s), s \geq r$  时,  $Lx \neq Hx$ , 又  $\text{Im} Q = \text{Ker} L = \mathbf{R}^n$ , 定义同构映射  $J = I: \text{Im} Q \rightarrow \text{Ker} L$ , 由文 [7] 命题 II. 12 及条件④ 知

$$|d[(L, H), B_X(s)]| = |\deg(JQN, B_X(s) \cap \text{Ker} L, 0)| = |\deg(g^0, B_{\mathbf{R}^n}(s), 0)| \neq 0, s \geq r$$

于是引理 1 条件④ 成立.

引理 1 条件① 显然是满足的. 从而由引理 1 知存在  $T_0 > 0$ , 当  $(b + 2X) \leq T_0$  时, 方程 (1) 至少存在一个  $w$  周期解.

推论 在定理 1 中, 若将条件④ 改为存在  $V \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ , 当  $|x| \geq r$  时,

$\text{grad} V(x) \neq 0$ , 且  $\langle \text{grad} V(x), \int_0^w g(t, x) dt \rangle > 0$ , 则结论仍成立.

证明 只需证明当  $s \geq r$  时,  $\deg(g^0, B_{\mathbf{R}^n}(s), 0) \neq 0$  即可. 事实上, 由定理 1 中证明可知, 当  $x \in \mathbf{R}^n, |x| \geq r$  时,  $QNx = \frac{1}{w} \int_0^w g(t, x) dt \neq 0$ , 定义  $H(\epsilon, x) = (1-\epsilon)QNx + \epsilon \text{grad} V(x)$ ,  $\epsilon \in [0, 1]$ , 则  $x \in B_{\mathbf{R}^n}(s)$  时,  $\langle \text{grad} V(x), H(\epsilon, x) \rangle > 0$ , 由拓扑度的同伦不变性有  $\deg(g^0, B_{\mathbf{R}^n}(s), 0) = \deg(\text{grad} V, B_{\mathbf{R}^n}(s), 0)$ . 又由文 [8] 中定理 6.3 知  $\deg(\text{grad} V, B_{\mathbf{R}^n}(s), 0) = 1$ , 故定理 1 条件④ 成立.

注 当  $b = 0$  时, 方程 (1) 即为 Liénard 型常微分方程, 定理 1 及推论仍成立, 且不同于文 [1, 2]

的结果.

例 1 方程 (2) 至少存在一个  $2\pi$  周期解.

证明 取  $\varepsilon = 1, b = \infty, F(x) = \frac{1}{4}x^2, g(t, h) = \sin(-\pi) \exp\{h(-\pi)\} + \sin t \exp\{-\sin t\}, U(t) = 2\sin t \exp\{-\sin t\}$ , 则  $g_0(a) = \int_0^{2\pi} \sin t \exp\{-\sin t\} dt$ , 由于  $\sin t \exp\{-\sin t\} \leq \sin t$ , 故  $\int_0^{2\pi} \sin t \exp\{-\sin t\} dt < 0$ , 从而  $g_0(a) = 0$  只有唯一实根  $a_0 > 0$ , 取  $s > a_0$ , 则  $\deg(g_0, (-s, s), 0) = 1 \neq 0$ , 由定理 1 知方程 (2) 至少存在一个  $2\pi$  周期解. 事实上,  $x(t) = \sin t$  是方程 (2) 的一个显见的周期解.

## 参 考 文 献

- 1 丁伟岳. On the existence of periodic solutions for LÉnard systems. 数学学报, 1982, 25(5): 627~632
- 2 葛谓高.  $n$  维 LÉnard 型方程的调和解. 数学年刊, 1990, 11(3): 297~307
- 3 Zhang B. On the retarded LÉnard systems. Proc Amer Math Soc, 1992, 115(3): 779~785
- 4 彭世国, 陈克安.  $n$  维具有时滞的 LÉnard 型方程的周期解. 湘潭大学自然科学学报, 1996, 18(4): 10~14
- 5 Gaines R E, Mawhin J. Coincidence degree and nonlinear differential equations. In Lecture Notes in Mathematics, 568. New York: Springer-Verlag, 1972. 10~35
- 6 彭世国. 中立型泛函微分方程的周期解. 广东工业大学学报, 1997, 14(1): 4~9
- 7 Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundry value problem. CBMS Regional Conference in Mathematics, 1979(40): 92~110
- 8 Deimling K. Nonlinear functional analysis. New York: Spriger-Verlag, 1985. 31~32

## Periodic Solutions of the Retarded LÉnard Equations

Peng Shiguo\* Zhu Siming

**Abstract** By using Mawhin's coincidence theory, some new results on the existence of periodic solutions of the retarded LÉnard equations  $\ddot{x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x^2} \dot{x} + g(t, x_t) = p(t)$  are obtained.

**Keywords** nonlinear differential equation, retarded type, periodic solution

\* Department of Mathematics and Physics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China