

关于逆极限空间转移映射的某些性质^{*}

马东魁

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275)

摘 要 证明了关于 X 的逆极限空间的转移映射具有下述结论: ① 转移映射的弱几乎周期点集等于映射 f 的弱几乎周期点集的逆极限空间, 类似的结论对拟弱几乎周期点集, 一致几乎周期点集, 测度中心和极小吸引中心也成立; ② f 在测度中心上为 Schweizer-Smital 混沌的. 当且仅当转移映射在其测度中心上为 Schweizer-Smital 混沌的, 文后, 举出了实例.

关键词 逆极限空间, 转移映射, 弱几乎周期点, 拟弱几乎周期点, 一致几乎周期点, 测度中心, Schweizer-Smital 混沌

分类号 O 175

若 X 为紧致度量空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, X 的逆极限空间是形如 $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ 的点构成的集合, 其中 $f(x_{i+1}) = x_i, i \geq 0$. 引入度量为 $D(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$, 其中, d 为 X 上的度量, 用 $\varprojlim (X, f)$ 表示 X 的逆极限空间. 转移映射 $e: \varprojlim (X, f) \rightarrow \varprojlim (X, f)$ 定义为 $e((x_0, x_1, x_2, \dots)) = (f(x_0), x_0, x_1, x_2, \dots)$. 注意这里 e 与单边符号空间的转移映射不同. 显然 e 是一同胚. 投影 $c_i: \varprojlim (X, f) \rightarrow X$ 定义则是 $c_i((x_0, x_1, x_2, \dots)) = x_i, i = 0, 1, 2, \dots$. $\varprojlim (X, f)$ 的拓扑由度量 D 诱导, 且 $\varprojlim (X, f)$ 是紧致的. 弱几乎周期点^[1]、拟弱几乎周期点^[2]、一致几乎周期点^[3]、测度中心^[4]、极小吸引中心^[4]、Schweizer-Smital 混沌^[5]最早出现在文 [6], 本文用文 [5] 的形式且简记为 SS 混沌等概念, 有着深刻的遍历内涵. 本文中出现的与这些概念相关的符号及记法分别与上述文献中相同.

定理 A^[4, 1] $C(f) = M(f) = \overline{W(f)}$.

文献 [1] 将混沌分为 3 个不同的层次, 并认为紧致系统全部重要的动力性态都集中在它的测度中心上, 且 $f|_{M(f)}: M(f) \rightarrow M(f)$ 混沌才是本质的和重要的.

文 [7, 8] 讨论了 (X, f) 与 $(\varprojlim (X, f), e)$ 之间的联系, 本文将继续这项工作.

1 本文结果

定理 1 若 $f: X \rightarrow X$ 连续, 则① $W(e) = \varprojlim (W(f), f)$; ② $QW(e) = \varprojlim (QW(f), f)$;

* 国家教委博士点基金 (9555810) 和广东省自然科学基金资助项目

收稿日期: 1998-03-19 马东魁, 男, 33 岁, 博士研究生, 讲师

③ $UA(e) = \varprojlim(UA(f), f)$; ④ $M(e) = \varprojlim(M(f), f)$; ⑤ $C(e) = \varprojlim(C(f), f)$ 成立.

定理 2 若 $f|_{M(f)}: M(f) \rightarrow M(f)$ 是 SS 混沌的, 当且仅当 $e|_{M(e)}: M(e) \rightarrow M(e)$ 是 SS 混沌的.

2 结果的证明

定理 1 的证明 ① $\forall x \in W(e)$, 设 $\bar{x} = (x, x_1, x_2, \dots)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得

$$\sum_{r=0}^{nN-1} i_{V(\bar{x}, N)}(e^r(x)) \geq n, \forall n > 0$$

由 $e^r(\bar{x}) = (f^r(x), f^{r-1}(x), \dots, f(x), x, x_1, \dots)$ 所以有

$$D(e^r(\bar{x}), \bar{x}) = d(f^r(x), x) + \frac{d(f^{r-1}(x), x_1)}{2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(f^r(x_i), x_i)}{2^i} \quad (x_0 = x)$$

若 $e^r(\bar{x}) \in V(\bar{x}, N)$, 则 $D(e^r(\bar{x}), \bar{x}) < N$ 于是 $d(f^r(x), x) \leq D(e^r(\bar{x}), \bar{x}) < N$ 所以

$$\sum_{r=0}^{nN-1} i_{V(x, N)}(f^r(x)) \geq n, \forall n > 0$$

于是 $x \in W(f)$. 同理, 对 $\forall i > 0$ 对 $x_i(\bar{x})$ 的第 i 个坐标而言, $N/2 > 0, \exists N_{N/2} > 0$, 使得

$$\sum_{r=0}^{nN_{N/2}-1} i_{V(x, N/2)}(e^r(\bar{x})) \geq n \quad \forall n > 0$$

对满足 $e^r(\bar{x}) \in V(\bar{x}, N/2)$ 的 r , 由于 $\frac{d(f^r(x_i), x_i)}{2} \leq D(e^r(\bar{x}), \bar{x}) < N/2$, 所以, $d(f^r(x_i), x_i) < N$ 于是 $\sum_{r=0}^{nN_{N/2}-1} i_{V(x_i, N)}(f^r(x_i)) \geq n, \forall n > 0$, 所以 $x_i \in W(f), \forall i$. 所以 $\bar{x} = (x, x_1, \dots) \in \varprojlim(W(f), f)$.

反之, $\forall x \in \varprojlim(W(f), f)$, 令 $\bar{x} = (x, x_1, x_2, \dots)$ 则 $x \in W(f), i = 0, 1, 2, \dots$. 由 X 紧致, 设其直径为 $M > 0, \forall \varepsilon > 0$, 选 $m > 0$ 使得 $\sum_{i=m}^{\infty} \frac{M}{2^i} = \frac{M}{2} < \frac{\varepsilon}{4}$, 对此 $\varepsilon > 0$, 由 f^j 的连续性 ($0 \leq j \leq m$), 对 $x_m, \exists W > 0$, 若有 $d(f^r(x_m), x_m) < W$ 设 $W < \varepsilon/4$, 则有 $d(f^{r+j}(x_m), f^j(x_m)) < \varepsilon/4 (0 \leq j \leq m)$

$$\text{所以 } D(e^r(\bar{x}), \bar{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(f^r(x_i), x_i)}{2^i} \leq \sum_{i=0}^m \frac{d(f^{r+(m-i)}(x_m), f^{m-i}(x_m))}{2^i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{M}{2^i} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

由于 $x_m \in W(f)$, 所以对上述 $W > 0, \exists N_W > 0$, 使得 $\sum_{r=0}^{nN_W-1} i_{V(x_m, W)}(f^r(x_m)) \geq n, \forall n > 0$. 由上面的论证知, 对上述 $\varepsilon > 0$ 有 $\sum_{r=0}^{nN_W-1} i_{V(\bar{x}, N)}(e^r(\bar{x})) \geq n, \forall n > 0$, 于是 $\bar{x} \in W(e)$, 所以 $W(e) = \varprojlim(W(f), f)$.

② 与上面同样的方法可证 $QW(e) = \varprojlim(QW(f), f)$.

③ $\forall x \in UA(e)$, 设 $\bar{x} = (x, x_1, x_2, \dots)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在相对稠密的集合 $\{n\}$, 使得

$$e^{k+n_i}(x) \in V(e^k(x), N), \forall i \geq 0, \forall k \geq 0$$

由 $D(e^{k+n_i}(\bar{x}), e^k(\bar{x})) = d(f^{k+n_i}(x), f^k(x)) + \frac{d(f^{k+n_i-1}(x), f^{k-1}(x))}{2} + \dots$

则 $d(f^{k+n_i}(x), f^k(x)) \leq D(e^{k+n_i}(\bar{x}), e^k(\bar{x})) < \varepsilon$

所以 $f^{k+n_i}(x) \in V(f^k(x), N), \forall i \geq 0, \forall k \geq 0$ 所以 $x \in UA(f)$. 其相对稠密集与 $\bar{x}$ 的相同, 与

① 类似可证 $x \in UA(f), \forall i \geq 1$, 所以 $\bar{x} \in \varprojlim(UA(f), f)$.

反之, $\forall \varepsilon \in \lim(UA(f), f), \bar{x} = (x, x_1, x_2, \dots)$, 对 $\forall m \geq 0, x_m \in UA(f), x_0 = x, \forall \forall \geq 0$, 存在相对稠密集 $\{n_i\}$, 使得 $f^{k+n_i}(x_m) \in V(f^k(x_m), W), \forall i \geq 0, \forall k \geq 0$.

设 X 的直径为 $M > 0, \forall \forall \geq 0$, 选定 $m > 0$, 使得 $\sum_{i=m+1}^{\infty} M/2^i = M/2^m < X/4$, 对此 $\forall \geq 0$, 由 f^i 的一致连续性, $0 \leq j \leq m$, 对 x_m , 存在 $0 < W < X/4$, 若 $d(f^{k+n_i}(x_m), f^k(x_m)) < W < X/4$. 则有 $d(f^{k+n_i}(x_{m-1}), f^k(x_{m-1})) < X/4, \dots, d(f^{k+n_i}(x), f^k(x)) < X/4, \forall i \geq 0, \forall k \geq 0$, 与①类似证明有 $D(e^{k+n_i}(\bar{x}), e^k(\bar{x})) < X$

对此 $\forall \geq 0$, 对 x_m 的相对稠密集 $\{n_i\}$ 有 $e^{k+n_i}(x) \in V(e^k(x), W), \forall k \geq 0, \forall i \geq 0$. 所以 $x \in UA(e)$, 于是 $UA(e) = \lim(UA(f), f)$.

④ 由定理 A, $M(e) = \overline{W(e)}$, 结合①知 $M(e) = \overline{W(e)} = \overline{\lim(W(f), f)}$, 从而只需证 $\lim(M(f), f) = \overline{\lim(W(f), f)}$, 又由 $M(f) = \overline{W(f)}$, 知 $\lim(W(f), f) \subseteq \lim(M(f), f)$.

又由 $M(f)$ 的定义知 $f(M(f)) \subseteq M(f)$, $M(f)$ 是紧致的, 从而 $f(M(f))$ 也是紧致的, 且是绝对测度 1 集, 结合 $M(f)$ 的定义知 $f(M(f)) = M(f)$. 再取 $f_1, g_1, h = f|_{M(f)}$, 则 h 可视为 1 个拓扑半共扼, 由文 [2] 推论 2 有 $h(W(f_1)) = W(g_1)$ 而 $W(f_1) = W(g_1) = W(f)$, 于是 $f(W(f)) = W(f)$.

下面证 $\lim(M(f), f) \subseteq \overline{\lim(W(f), f)}, \forall \bar{x} = (x, x_1, x_2, \dots) \in \lim(M(f), f), x_0 = x$, 则 $x \in M(f), \forall i \geq 0, \forall \forall \geq 0$, 设 M 为 X 的直径, 选 $m > 0$ 使得 $\sum_{i=m+1}^{\infty} M/2^i < X/4$, 由 $x_m \in M(f), \exists \{x_m^{(n)}\} \subset W(f)$, 使得 $x_m^{(n)} \rightarrow x_m (n \rightarrow \infty)$, 由 f^i 的连续性, 有 $f^i(x_m^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^i(x_m)$, $0 \leq j \leq m$ 于是对此 $\forall \geq 0, \exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时 $d(f^i(x_m^{(n)}), f^i(x_m)) < X/4, 0 \leq j \leq m$, 由 $f(W(f)) = W(f)$, 则对每个 $n > N, \exists x_m^{(n)} \in W(f)$ 使得 $f(x_m^{(n)+j}) = x_m^{(n)+j-1}, \forall j \geq 1$ 即 $\bar{x}^{(n)} = (x^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}, x_m^{(n)+1}, \dots) \in \lim(W(f), f)$ 且有

$$D(\bar{x}, \bar{x}^{(n)}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(x_i, x_i^{(n)})}{2^i} \leq \sum_{i=0}^m \frac{d(f^i(x_m), f^i(x_m^{(n)}))}{2^{m-i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{M}{2^i} \leq \frac{X}{2} + \frac{X}{4} < X$$

所以 $\bar{x} \in \overline{\lim(W(f), f)}$, 所以 $\lim(M(f), f) \subseteq \overline{\lim(W(f), f)}$ 于是 $M(e) = \lim(M(f), f)$.

⑤ 由定理 A, 结合④, 立即得证. 定理 1 至此证毕.

引理 $f: X \rightarrow X$ 是连续满射, 则 f 是 SS 混沌的当且仅当 $e \lim(X, f) \rightarrow \lim(X, f)$ 是 SS 混沌的.

证明 设 S 为 f 的 SS 混沌集, 对于每个 $x \in S$, 取定 $e_0^{-1}(x)$ 中 1 个成员记为 $\bar{x}$, 记 S' 为所有这样的成员构成的集合, 显然 S' 也是不可数集. $\forall \bar{x} = (x, x_1, x_2, \dots), \bar{y} = (y, y_1, y_2, \dots) \in S'$, 设 $\bar{x} \neq \bar{y}$, 则 $x \neq y$, 于是 $D(\bar{x}, \bar{y}) \geq d(x, y)$, 所以若 $\exists \forall \geq 0$, 使得 $F_{xy}(\forall) = 0$, 则必有 $F_{\bar{x}\bar{y}}(\forall) = 0$, 满足 SS 混沌定义中的 (ii).

下面证 SS 混沌定义中的 (i) 满足. 令 $M = \text{diam}(X), \forall \forall \geq 0, \exists m > 0$ 使得 $\sum_{i=m+1}^{\infty} M/2^i < X/4$, 对此 $\forall \geq 0, \exists \forall \geq 0, W < X/4$, 使得当 $d(f^i(x), f^i(y)) < W$ 时, 与定理 1 证明类似有 $D(e^{k+m}(\bar{x}), e^{k+m}(\bar{y})) < X$ 对此 $\forall \geq 0$, 由 $F_{xy}^*(W) = 1$ 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i_{[0, W]}(d(f^i(x), f^i(y))) = 1$$

于是存在递增的自然数列 $\{n_k\}$, 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k} i_{[0, W]}(d(f^i(x), f^i(y))) = 1$

于是由 $\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} i_{[0, \mathbb{W}]}(d(f^i(x), f^i(y))) \leq \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} i_{[0, \mathbb{X}]}(D(e^{i^+ m}(\bar{x}), e^{i^+ m}(\bar{y}))) \leq 1$

又 m 是常数, 所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} i_{[0, \mathbb{X}]}(D(e^i(\bar{x}), e^i(\bar{y}))) = 1$, 故 $F_{\bar{x}\bar{y}}^*(\mathbb{X}) = 1$. (i) 得证, e 是 SS 混沌的.

另一方面, 设 S' 是 e 的 SS 混沌集, 令 $S = c_0(S')$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in S', \bar{x} \neq \bar{y}$ 由于 e 是 SS 混沌的, 则它一定是 Li-Yorke 混沌的, 则一定有 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup D(e^n(\bar{x}), e^n(\bar{y})) > 0$

设 $x = c_0(\bar{x}), y = c_0(\bar{y})$, 则一定有 $x \neq y$, 于是 S 也是不可数集. 下面证 S 是 X 中 SS 混沌集. $\forall x, y \in S$, 令 $\bar{x}, \bar{y}$ 分别是 x, y 在 S' 中的原象, 由 $D(e^i(\bar{x}), e^i(\bar{y})) \geq d(f^i(x), f^i(y))$, 则 SS 混沌定义中 (i) 显然满足.

下面证 (ii) 也满足, 由于 e 满足 (ii), 即 $\exists \mathbb{X} > 0$, 使得

$$F_{\bar{x}\bar{y}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i_{[0, \mathbb{X}]}(D(e^i(\bar{x}), e^i(\bar{y}))) = 0$$

于是存在一递增的自然数列 $\{n_k\}$, 使得

$$F_{\bar{x}\bar{y}}(\mathbb{X}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} i_{[0, \mathbb{X}]}(D(e^i(\bar{x}), e^i(\bar{y}))) = 0$$

再次设 $M = \text{diam}(X)$, 对此 $\mathbb{X} > 0, \exists m > 0$, 使得 $\sum_{i=m+1}^{\infty} M/2^i < \mathbb{X}/4$, 由于 m 是常数

所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} i_{[0, \mathbb{X}]}(D(e^{i^+ m}(\bar{x}), e^{i^+ m}(\bar{y}))) = 0$

于是, 对每个 $i, 1 \leq i \leq n_k, \forall n_k$, 若 $D(e^{i^+ m}(\bar{x}), e^{i^+ m}(\bar{y})) \geq \mathbb{X}$ 则必有

$$\sum_{j=0}^m \frac{d(f^{i^+ m-j}(x), f^{i^+ m-j}(y))}{2^j} \geq \frac{3\mathbb{X}}{4}$$

又由 $f, f^2, \dots, f^m$ 的连续性, 对上述 $\mathbb{X} > 0, \exists \mathbb{W} > 0$ 当 $d(f^i(x), f^i(y)) < \mathbb{W}$ 时, 一定有

$$\sum_{j=0}^m \frac{d(f^{i^+ m-j}(x), f^{i^+ m-j}(y))}{2^j} < \frac{3\mathbb{X}}{4}$$

于是若 $D(e^{i^+ m}(\bar{x}), e^{i^+ m}(\bar{y})) \geq \mathbb{X}$ 一定有 $d(f^i(x), f^i(y)) \geq \mathbb{W}$. 再结合上 1 个极限式

所以 $F_{xy}(\mathbb{W}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} i_{[0, \mathbb{W}]}(d(f^i(x), f^i(y))) = 0$

所以 f 也满足 SS 混沌定义的 (ii), 于是 f 是具有混沌集 S 的 SS 混沌映射.

定理 2 的证明 由于 $M(f)$ 是紧致的, 且 $f|_{M(f)}: M(f) \rightarrow M(f)$ 是满射, 由定理 1 之④知

$$M(e) = \lim_{i \rightarrow 1} (M(f), f)$$

再结合引理, 立即得证.

例 单边符号空间 E_2 的逆极限空间的转移映射在测度中心上是 SS 混沌的. 这由定理 2 和文 [5] 定理 1 立即得证.

致谢 感谢周作领教授的指导.

参 考 文 献

- 1 周作领. 弱几乎周期点和测度中心. 中国科学 (A 辑), 1992 (6): 572~ 581
- 2 周作领, 何伟弘. 轨道结构的层次与拓扑半共扼. 中国科学 (A 辑), 1995 (5): 457~ 464
- 3 周作领, 何伟弘. 一致几乎周期点. 科学通报, 1996 (22): 2024~ 2026

4 周作领. 测度中心与极小吸引中心. 科学通报, 1992 (23): 2115~ 2118

5 廖公夫, 范钦杰. 拓扑熵为零且 Schweizer-Smital 混沌的极小子转移. 中国科学 (A辑), 1997 (9): 769~ 774

6 Schweizer B, Smital J. Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of the interval. Trans Amer Math Soc, 1994, 334 (2): 737~ 754

7 Li S H. Dynamical properties of the shift maps on the inverse limit spaces, Ergod Th & Dynam Sys, 1992, 12 95~ 108

8 顾荣宝. 逆极限空间上移位映射的拓扑熵与混沌. 武汉大学学报 (自然科学版), 1995 (1): 22~ 26

Some Properties About the Shift Maps on the Inverse Limit Spaces

Ma Dongkui^{*}

Abstract Let X be a compact metric space and $f: X \rightarrow X$ be continuous. The following results about the shift maps on the inverse limit spaces are proved ① The weakly almost periodic set of the shift map equals the inverse limit space of the weakly almost periodic set of f . Similar results are proved for the quasi-weakly almost periodic set, uniformly almost periodic set, measure centre and minimal centre of attraction; ② f is chaotic in the sense of Schweizer and Smital on its measure centre if the shift map is chaotic in the sense of Schweizer and Smital on its measure centre. Finally, one example is given.

Keywords inverse limit space, shift map, weakly almost periodic point, quasi-weakly almost point, uniformly almost periodic point, measure centre, Schweizer-Smital chaos

。 简 讯 。

本刊被引频次继续位于高校学报前列

据中国科学院文献情报中心中国科学引文数据库最近公布的“被引频次最高的中国科技期刊 500名排行表”(1997年数据), 中山大学学报 (自然科学版) 在高校学报的排名从去年的第 8 名上升至第 6 名, 在综合性大学学报中连续 4 年位于前 4 名内.

被引频次位于高校学报前 10 名的刊物为:

1 厦门大学学报	5 武汉大学学报	8 清华大学学报
2 华中理工大学学报	6 中山大学学报	9 北京农业大学学报
3 南京大学学报	7 华中农业大学学报	10 北京医科大学学报
4 南京农业大学学报		

(张 文)

^{*} Department of Scientific Computing and Computer Applications, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China