

强严格凸和中点局部一致凸^{*}

黎永锦

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 证明了 Banach 空间 X 是局部一致非方的当且仅当对任意 $x \in S(X)$, 都有 $d_X(x, 1) > 0$; X 是强严格凸的当且仅当对任意 $x \in S(X)$, $y_n \in S(X)$ 和 $\tau \in \mathbf{R}$, 若 $\|x + \tau y_n\| \rightarrow 1$ 和 $\|x - \tau y_n\| \rightarrow 1$, 则 $\tau = 0$ 并证明了 X 是强严格凸的充要条件为 X 是中点局部一致凸的.

关键词 强严格凸, 中点局部一致凸, 一致非方, 局部一致非方

分类号 O 177.2

McGuigan^[1]利用 Milman 所定义的函数 $d_X(x, \tau)$ 来定义强端点和强严格凸空间, 并用函数 $d_X(\tau) = \inf\{d_X(x, \tau) \mid \|x\| = 1\}$ 来刻画一致凸和一致非方, 还证明了 Banach 空间 X 是一致非方的当且仅当 $d_X(1) > 0$; 是一致凸的当且仅当 $d_X(\tau) > 0$ 对任意 $\tau > 0$. 但由于强严格凸性的定义方式与一般凸性的定义不太一样, 因此人们一直对强严格凸空间的性质不太了解. 本文讨论了 $d_X(x, \tau)$ 和 Banach 空间 X 凸性及局部非方的关系, 证明了 X 是强严格凸的充要条件为 X 是中点局部一致凸的, 从而使强严格凸空间的性质变得比较清楚.

定义 1^[1] 若 X 是 Banach 空间, K 是 X 的凸子集, 令 $\|x - K\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in K\}$; $x \in K$ 称为 K 的强端点当且仅当对于任意 $\tau > 0, d_K(x, \tau) > 0$, 这里

$$d_K(x, \tau) = \inf\{\max\{\|(x + \tau y) - K\|, \|(x - \tau y) - K\|\} \mid \|y\| = 1\}.$$

当 K 是 X 的单位球时, 记 $d_K(x, \tau) = d_X(x, \tau) = \inf\{\max\{\|x \pm \tau y\| \mid \|y\| = 1\} - 1$.

定义 2^[1] X 称为强严格凸的, 如果 $d_X(x, \tau) > 0$ 对于所有 $\tau > 0$ 和 $\|x\| = 1$ 都成立.

定义 3^[2] X 称为一致非方, 若存在 $\forall \delta > 0$, 使得对任意 $x, y \in S(X)$, 都有 $\max\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \geq 1 + \delta$.

定义 4^[3] X 称为局部一致非方, 如果对任意 $x \in S(X)$, 存在 $\forall \delta > 0$, 使得对任意 $y \in S(X)$, 都有 $\max\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \geq 1 + \delta$.

定义 5^[3] X 称为中点局部一致凸的, 若对于任意 $x \in S(X)$, $\forall \delta > 0$, 存在 $\forall \epsilon > 0, \forall y, z \in S(X)$, $\|x - (y + z)/2\| < \epsilon$ 时, 有 $\|y - z\| < \delta$.

对于 $d_X(\tau) = \inf\{d_X(x, \tau) \mid \|x\| = 1\}$ 情形, McGuigan 证明了 X 是一致非方的当且仅当 $d_X(1) > 0$. 对于局部一致非方, 本文得到了类似结果.

定理 1 X 是局部一致非方当且仅当对任意 $x \in S(X)$ 都有 $d_X(x, 1) > 0$.

* 中山大学高等学术研究中心 (96M1) 资助项目

收稿日期: 1998-03-18 黎永锦, 男, 35 岁, 副教授

证明 若 X 是局部一致非方的, 则对任意 $x \in S(X)$, 有 $d_X(x, 1) > 0$. 因为假设存在 $x \in S(X)$, 有 $d_X(x, 1) = 0$, 则一定有 $y_n \in S(X)$, 使得 $a_n = \max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} \rightarrow 1$, 故对任意 $W > 0$, 存在 $y_n \in S(X)$, 使得 $\max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} < 1 + W$. 但这与 X 是局部一致非方的矛盾, 所以对任意 $x \in S(X)$, 都有 $d_X(x, 1) > 0$.

反之, 假设 X 非局部一致非方, 则存在 $x \in S(X)$, 对任意 $W = 1/n$, 存在 $y_n \in S(X)$, 使得 $a_n = \max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} < 1 + 1/n$, 故 $d_X(x, 1) = 0$, 与假设矛盾. 所以若 $d_X(x, 1) > 0$ 对任意 $x \in S(X)$ 成立, 则 X 一定是局部一致非方的.

推论 1 若 X 是强严格凸的, 则 X 一定是局部一致非方的.

下面定理给出了 X 不是局部一致非方的特征.

定理 2 X 不是局部一致非方的当且仅当存在 $x \in S(X)$, $y_n \in S(X)$, 使得 $\|x + y_n\| \rightarrow 1$ 和 $\|x - y_n\| \rightarrow 1$.

证明 若 X 非局部一致非方, 则存在 $x \in S(X)$, 使得对任意 $W = 1/n$, 都有 $y_n \in S(X)$, 使得 $\max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} < 1 + 1/n$, 既然 $\max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} \geq 1 + 1/n$, 因此有 $\max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} \rightarrow 1$. 不失一般性, 不妨假设 $\max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} = \|x + y_n\|$ 且 $\min\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} = \|x - y_n\|$. 如果 $\min\{\|x \pm y_n\|\}$ 不收敛于 1, 则存在 $X_0 > 0$, 使得 $\|x - y_{n_k}\| \leq 1 - X_0$, 对 $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ 成立. 由于 $1 = \|x\| \leq \|(x + y_{n_k})/2\| + \|(x - y_{n_k})/2\| \leq \|(x + y_{n_k})/2\| + (1 - X_0)/2$, 因此由 $\|x + y_n\| \rightarrow 1$ 可知 $1 = \|x\| \leq 1/2 + (1 - X_0)/2 < 1$, 矛盾. 这一矛盾证明 $\min\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} \rightarrow 1$. 所以有 $\|x + y_n\| \rightarrow 1$ 和 $\|x - y_n\| \rightarrow 1$.

反过来, 若存在 $x \in S(X)$ 及 $y_n \in S(X)$, 使得 $\|x + y_n\| \rightarrow 1$ 和 $\|x - y_n\| \rightarrow 1$, 则对任意 $W > 0$, 存在 N , 使得 $n > N$ 时, 有 $\|x + y_n\| < 1 + W$ 和 $\|x - y_n\| < 1 + W$, 因而 $\max\{\|x + y_n\|, \|x - y_n\|\} < 1 + W$, 所以 X 非局部一致非方的.

不难看出 X 是严格凸的当且仅当若 $x \in S(X)$, $y_n \in S(X)$, $\in \mathbf{R}^1$, 且 $\|x + Ty_n\| = 1$ 和 $\|x - Ty_n\| = 1$, 则 $T = 0$. 类似地对于强严格凸空间也有类似的结果.

定理 3 X 是强严格凸的当且仅当对任意 $x \in S(X)$, $y_n \in S(X)$ 和 $T \in \mathbf{R}^1$, 若 $\|x + Ty_n\| \rightarrow 1$ 和 $\|x - Ty_n\| \rightarrow 1$, 则 $T = 0$.

证明 若 X 是强严格凸, 且 $x \in S(X)$, $y_n \in S(X)$, $T \in \mathbf{R}^1$, $\|x + Ty_n\| \rightarrow 1$ 和 $\|x - Ty_n\| \rightarrow 1$, 则 $T = 0$. 否则 $|T| > 0$, 从而 $d_X(x, |T|) \leq \max\{\|x + Ty_n\|, \|x - Ty_n\|\} \|y_n\| = 1 - 1 = 0$, 矛盾.

反过来, 假设 X 不是强严格凸, 且存在 $x \in S(X)$, $y_n \in S(X)$ 及 $T_0 > 0$, 使得 $\max\{\|x + Ty_n\|, \|x - Ty_n\|\} \rightarrow 1$, 类似于上面定理的证明, 不难证得 $\|x + Ty_n\| \rightarrow 1$, 且 $\|x - Ty_n\| \rightarrow 1$, 矛盾. 所以 X 是强严格凸的.

定理 4 X 是强严格凸的当且仅当 X 是中点局部一致凸的.

证明 假设 X 是中点局部一致凸的, 但 X 不是强严格凸的, 则存在 $x \in S(X)$ 和 $T_0 > 0$, 使得 $d_X(x, T_0) = 0$, 故有 $y_n \in S(X)$, 使得 $\max\{\|x + Ty_n\|, \|x - Ty_n\|\} \rightarrow 1$, 类似于前面定理的证明可以证得 $\|x + Ty_n\| \rightarrow 1$ 且 $\|x - Ty_n\| \rightarrow 1$.

令 $u_n = (x - Ty_n) / \|x - Ty_n\|$, $v_n = (x + Ty_n) / \|x + Ty_n\|$
 则 $\|(x - Ty_n) - u_n\| = \|(x - Ty_n) - (x - Ty_n) / \|x - Ty_n\|\| =$
 $\|x - Ty_n\| \cdot \|1 - 1 / \|x - Ty_n\|\| \rightarrow 0$.

且 $\| (x + T_{y_n}) - v_n \| = \| (x + T_{y_n}) - (x + T_{y_n}) / \| x + T_{y_n} \| \| =$
 $\| x + T_{y_n} \| \cdot \| 1 - 1 / \| x + T_{y_n} \| \| \rightarrow 0.$

故 $\| x - (u_n + v_n) / 2 \| \rightarrow 0,$

但 $\| u_n - v_n \| = \| (x - T_{y_n}) \| / \| x - T_{y_n} \| - (x + T_{y_n}) / \| x + T_{y_n} \| \| \rightarrow 2T,$

这与 X 是中点局部一致凸矛盾.

反之, 若 X 是强严格凸的, 但 X 非中点局部一致凸, 则存在 $x \in S(X), u_n, v_n \in S(X)$ 和 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\| x - (u_n + v_n) / 2 \| \rightarrow 0$, 且 $\| u_n - v_n \| \geq \varepsilon_0 > 0$, 由于 $0 < \varepsilon_0 \leq \| u_n - v_n \| \leq 2$, 因而 $\| u_n - v_n \|$ 有收敛子序列, 因此不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \| u_n - v_n \| = \varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0, y_n = \frac{u_n + v_n}{2} \setminus \left\| \frac{u_n - v_n}{2} \right\|,$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \| x + T_{y_n} \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_n + v_n}{2} + T \frac{u_n + v_n}{2} \setminus \left\| \frac{u_n + v_n}{2} \right\| \right\| = 1,$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \| x - T_{y_n} \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_n + v_n}{2} - T \frac{u_n + v_n}{2} \setminus \left\| \frac{u_n + v_n}{2} \right\| \right\| = 1$

从而 $d_X(x, T) = 0$, 但这与 X 是强严格凸的矛盾. 所以 X 一定是中点局部一致凸的.

推论 2 若 X 是中点局部一致凸的, 则 X 是局部一致非方的.

推论 3 X 是中点局部一致凸的当且仅当对于任意 $x \in S(X)$ 和 $T \in \mathbf{R}^1$, 若 $\| x + T_{y_n} \| \rightarrow 1$, 且 $\| x - T_{y_n} \| \rightarrow 1$, 则 $T = 0$.

推论 4 X 是强严格凸的当且仅当对任意 $x, y \in S(X), T > 0$, 都有

$$\max \{ \| x + T_{y_n} \|, \| x - T_{y_n} \| \} > 1.$$

参 考 文 献

- McGuigan R. Strongly extreme points in Banach spaces. Manuscripta Math, 1971, 5: 113~ 122
- James R C. Uniformly non-square Banach spaces. Ann of Math, 1964, 80: 542~ 550
- Intratesescu V. Strict convexity and complex strict convexity: theory and applications. New York: Dekker, 1984. 25~ 240
- Diestel J. Geometry of Banach space—select topics. New York: Springer-Verlan, 1975. 56~ 105
- Kutzarova D N. On condition (U) and Δ -uniform convexity. C R Acad Bulgar Sci, 1989, 42: 15 ~ 18

Strongly Strict Convexity and Locally Uniform Convexity

Li Yongjin^{*}

Abstract It is shown that Banach space X is locally uniformly non-square if and only if $d_X(x, 1) > 0$ for all $x \in S(X)$; X is strongly strictly convex if and only if whenever for any $x \in S(X), y \in S(X)$ and $T \in \mathbf{R}$, if $\| x + T_{y_n} \| \rightarrow 0$, and $\| x - T_{y_n} \| \rightarrow 1$, then $T = 0$; and X is strongly strictly convex if and only if X is midpoint locally uniformly convex.

Keywords strongly strictly convex, midpoint locally uniformly convex, uniformly non-square, locally uniformly non-square

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China