

文章编号: 0529-6579 (1999) 03-0001-06

# 无界停时带跳倒向随机微分方程 解的存在唯一性 (I)\*

司徒荣, 曾爱婷

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 研究以无界停时为终端的带跳倒向随机微分方程在李氏条件下解的存在唯一性, 其解存在的空间与终端为有界停时的情形不同. 并给出一些例子表明定理中的条件不能减弱.

**关键词:** 倒向随机微分方程 (BSDE); Itô 公式; 鞅不等式; 李氏条件; 停时; 适应解

**中图分类号:** O 241.8 **文献标识码:** A

倒向随机微分方程在金融市场、随机控制和解偏微分方程中均有重要应用<sup>[1, 2]</sup>. 本文将运用文 [3] 的方法讨论  $\mathbf{R}^d$  中的如下 BSDE: (注意现在的  $\tau$  可以无界. 文[4] 曾讨论不带跳的情形, 但这里所用的方法与文[4] 不同, 并蕴含了它的结论).

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s(z) N_k(dsdz), t \geq 0 \quad (1)$$

其中, ①  $w_t$  是  $r$  维的标准布朗运动,  $k(\cdot)$  是取值于可测空间  $(Z, \mathcal{B}(Z))$  的 Poisson 点过程;

②  $N_k(dsdz)$  是由  $k(\cdot)$  定义的 Poisson 计数测度, 其补偿是  $\Pi(dz)ds$ , 这里  $\Pi(\cdot)$  是  $\mathcal{B}(Z)$  上的  $\sigma$ -有限测度; ③  $N_k(dsdz)$  是满足下式的鞅测度

$$N_k(dsdz) = N_k(dsdz) - \Pi(dz)ds \quad (2)$$

④  $\mathcal{F}_t$  是  $\sigma(w_s, k_s, 0 \leq s \leq t)$  的完备化,  $\tau$  是  $\mathcal{F}_t$ -停时(可以无界),  $X$  是  $\mathcal{F}_\tau$  可测的  $\mathbf{R}^d$  值随机变量; 记  $S_{\mathcal{F}_t} \triangleq \left\{ x = x(\cdot, \omega): x_t \in \mathcal{F}_t, \text{ 且 } E \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_t|^2 < \infty \right\};$

$$L_{\mathcal{F}_t}^2([0, \tau]; \mathbf{R}^d) \triangleq \left\{ f = f(\cdot, \omega): f_t \in \mathcal{F}_t, \text{ 且 } E \int_0^\tau |f(t, \omega)|^2 dt < \infty \right\};$$

类似定义  $L_{\mathcal{F}_t}^2([0, \tau]; \mathbf{R}^{d \otimes r})$ ,

$$L_{\Pi(\cdot)}^2(\mathbf{R}^d) \triangleq \left\{ f(z): z \in Z, f(z) \in \mathbf{R}^d, \text{ 且 } ||| f ||| = \left( \int_Z |f(z)|^2 \Pi(dz) \right)^{1/2} < \infty \right\};$$

$$\mathcal{F}_{k, \mathcal{F}_t}^2([0, \tau]; \mathbf{R}^d) \triangleq \left\{ f = f(\cdot, z, \omega): f_t \text{ 为 } \mathcal{F}_t \text{ 可料, } E \int_0^\tau ||| f(t, \omega) |||^2 dt < \infty \right\};$$

$\langle a, b \rangle = a \circ b$  是  $a, b \in \mathbf{R}^d$  的内积;  $\|q\|$  是矩阵  $q \in \mathbf{R}^{d \otimes r}$  的范数;

⑤  $b(t, x, q, p, \omega): [0, \tau] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d \otimes r} \times L_{\Pi(\cdot)}^2(\mathbf{R}^d) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  是  $\mathcal{F}_t$  适应的可测过程.

\* 基金项目: 国家自然科学基金重大项目 (79790130); 中山大学前沿项目研究基金资助项目

收稿日期: 1998-09-22 作者简介: 司徒荣, 男, 1935 年生, 教授, 博士生导师.

## 1 解的定义

定义 1 记  $H \triangleq S_{\mathcal{F}} \times L^2_{\mathcal{F}}([0, \tau; \mathbf{R}^{d \otimes r}) \times \mathcal{F}_{k, \mathcal{F}}([0, \tau; \mathbf{R}^d)$ , 令

$$\|(x, q, p)\| = \|x\|_1 + \|q\|_2 + \|p\|_3$$

其中,  $\|x\|_1^2 = E \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_t|^2$ ,  $\|q\|_2^2 = E \int_0^\tau \|q_t\|^2 dt$ ,  $\|p\|_3^2 = E \int_0^\tau \|p_t\|^2 dt$ , 则  $(H, \|\cdot\|)$  是 Banach 空间.

定义 2 若  $(x_t, q_t, p_t) \in H$  满足方程(1), 则称它为方程(1) 的解.

## 2 先验估计

引理 1 设  $(x_t, q_t, p_t) \in H$  是方程(1) 的解,

①  $E|X|^2 < \infty$ , 且  $\forall x \in \mathbf{R}^d, q \in \mathbf{R}^{d \otimes r}, p \in L^2_{\mathcal{F}}(\cdot)(\mathbf{R}^d)$ , 有

$$\langle x, b(t, x, q, p, \omega) \rangle \leq c_1(t) |x| (1 + |x|) + c_2(t) |x| (\|q\| + \|p\|),$$

其中, 假设

(H1)  $c_1(t), c_2(t) \geq 0$  是非随机的, 且  $c_1^0 = \int_0^\infty c_1(t) dt < \infty$ ,  $c_2^0 = \int_0^\infty c_2(t)^2 dt < \infty$ ;

则存在只依赖于  $c_1^0, c_2^0$  和  $E|X|^2$  的常数  $k_0 \geq 0$ , 使得

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_t|^2 + \int_0^\tau (\|q_t\|^2 + \|p_t\|^2) dt \right] \leq k_0 < \infty \quad (3)$$

证明 1) 对  $|x_s|^2$  在  $[t \wedge \tau, \tau]$  上运用 Ito 公式, 并运用 Gronwall 不等式, 可得

$$E \left[ |x_{t \wedge \tau}|^2 + \frac{1}{2} \int_{t \wedge \tau}^\tau (\|q_s\|^2 + \|p_s\|^2) ds \right] \leq \left( E|X|^2 + c_1^0 \right) \exp \left[ \int_0^\infty (3c_1(s) + 4c_2(s)^2) ds \right] \triangleq k_0 < \infty \quad (4)$$

2) 对正向的 SDE 用 Ito 公式:

$$E \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_{t \wedge \tau}|^2 \leq E|x_0|^2 + c_1^0 + \int_0^\infty (3c_1(s) + 2c_2(s)^2) E|x_{s \wedge \tau}|^2 ds + 2E \int_0^\tau (\|q_s\|^2 + \|p_s\|^2) ds + 2E \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \int_0^{t \wedge \tau} x_s q_s dw_s \right| + 2E \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \int_0^{t \wedge \tau} \int_Z x_s p_s(z) N_k(ds dz) \right|$$

由鞅不等式、法都引理及 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} E \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_{t \wedge \tau}|^2 &\leq E|x_0|^2 + c_1^0 + \int_0^\infty (3c_1(s) + 2c_2(s)^2) E|x_{s \wedge \tau}|^2 ds + \\ &2E \int_0^\tau (\|q_s\|^2 + \|p_s\|^2) ds + 2c_{01}^2 E \int_0^\tau \|p_s\|^2 ds + 4c_{02}^2 E \int_0^\tau \|p_s\|^2 ds \leq \\ &k_0 + c_1^0 + (3c_1^0 + 2c_2^0) \cdot k_0 + (2 + 2c_{01}^2 + 4c_{02}^2) \cdot 2k_0 \triangleq \bar{k}_0 < \infty \end{aligned} \quad (5)$$

由(4), (5) 式得  $E \left[ \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_t|^2 + \int_0^\tau (\|q_t\|^2 + \|p_t\|^2) dt \right] \leq k_0 < \infty$  ( $k_0$  只与  $c_1^0, c_2^0$  和  $E|X|^2$  有关). 证完.

## 3 解的唯一性定理

定理 1 设引理 1 中的条件 ① 成立, 且

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \forall x_i \in \mathbf{R}^d, q_i \in \mathbf{R}^{d \otimes r}, p_i \in L^2_{\mathbb{H}(\cdot)}(\mathbf{R}^d), (i = 1, 2), \\ & \langle x_1 - x_2, b(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(t, x_2, q_2, p_2, \omega) \rangle \leq \\ & c_1(t) \rho(|x_1 - x_2|^2) + c_2(t) |x_1 - x_2| \left( \|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\| \right) \end{aligned}$$

其中,  $c_1(t), c_2(t)$  满足假设(H1), 实函数  $\rho(u), u \geq 0$  满足以下条件:

假设(H2):  $\rho(0) = 0$ ; 当  $u > 0$  时  $\rho(u) > 0$ ;  $\frac{d\rho(u)}{du} > 0, \frac{d^2\rho(u)}{du^2} < 0$ , 且  $\int_0^+ du / \rho(u) = \infty$

则方程(1) 的解在  $H$  中唯一.

注 方程(1) 的解在  $H$  中唯一是指: 若  $(x^i, q^i, p^i), (i = 1, 2)$  是方程(1) 的 2 个解, 则

$$E \left( \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_t^1 - x_t^2|^2 + \int_0^\tau \|q_t^1 - q_t^2\|^2 dt + \int_0^\tau \|p_t^1 - p_t^2\|^2 dt \right) = 0.$$

证明 设  $(x^i, q^i, p^i), (i = 1, 2)$  是方程(1) 的 2 个解.

记  $\hat{x}_t = x_t^1 - x_t^2$ , etc.  $\hat{b}_t = b(t, x_t^1, q_t^1, p_t^1, \omega) - b(t, x_t^2, q_t^2, p_t^2, \omega)$ ,  $\rho_1(u) = \rho(u) + u$ .

1) 对 BSDE 用 Itô 公式, 由条件  $\textcircled{2}$  得

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{t \wedge \tau}|^2 \leq & 2 \int_{t \wedge \tau}^\tau [c_1(s) \rho(|\hat{x}_s|^2) + c_2(s) |\hat{x}_s| (\|\hat{q}_s\| + \|\hat{p}_s\|)] ds - 2 \int_{t \wedge \tau}^\tau \hat{x}_s \hat{q}_s dw_s - \\ & \int_{t \wedge \tau}^\tau \|\hat{q}_s\|^2 ds - \int_{t \wedge \tau}^\tau \int_Z \left( |\hat{p}_s(z)|^2 + 2\hat{x}_s \hat{p}_s(z) \right) N_k(dsdz) - \int_{t \wedge \tau}^\tau \|\hat{p}_s\|^2 ds \end{aligned}$$

$$\text{故 } z_t \triangleq E \left( |\hat{x}_{t \wedge \tau}|^2 + \frac{1}{2} \int_{t \wedge \tau}^\tau (\|\hat{q}_s\|^2 + \|\hat{p}_s\|^2) ds \right) \leq \int_t^\infty (2c_1(s) + 4c_2(s)^2) \rho_1(z_s) ds$$

由文[5] 知  $z_t = 0, \forall t \geq 0$ .

$$\text{故 } E |\hat{x}_{t \wedge \tau}^2 - \hat{x}_{t \wedge \tau}^1|^2 = 0, E \int_{t \wedge \tau}^\tau \|\hat{q}_s^1 - \hat{q}_s^2\|^2 ds = 0, E \int_{t \wedge \tau}^\tau \|\hat{p}_s^1 - \hat{p}_s^2\|^2 ds = 0 \quad (6)$$

$$2) \text{ 对正向的SDE 用 Itô 公式, 注意到 } E \int_0^\tau \int_Z |\hat{p}_s(z)|^2 N_k(dsdz) = E \int_0^\tau \|\hat{p}_s\|^2 ds = 0.$$

由条件  $\textcircled{2}$  和(6), 与引理 1 的 2) 类似地, 可得

$$\frac{1}{4} E \sup_{0 \leq t \leq \tau} |\hat{x}_{t \wedge \tau}|^2 \leq 2 \int_0^\infty (c_1(s) + c_2(s)^2) \cdot \left( \rho \left( E \sup_{s \geq 0} |\hat{x}_{s \wedge \tau}|^2 \right) + E \sup_{s \geq 0} |\hat{x}_{s \wedge \tau}|^2 \right) ds.$$

从而  $E \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x_t^1 - x_t^2|^2 = 0$ . 证完.

## 4 李氏条件下解的存在唯一性

定理 2 设引理 1 中的条件  $\textcircled{1}$  及在下面的条件  $\textcircled{3}$  中假设(H1), (H2) 成立

$$\textcircled{3} \quad \forall x_i \in \mathbf{R}^d, q_i \in \mathbf{R}^{d \otimes r}, p_i \in L^2_{\mathbb{H}(\cdot)}(\mathbf{R}^d), (i = 1, 2)$$

$$\begin{aligned} & |b(t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(t, x_2, q_2, p_2, \omega)| \leq \\ & c_1(t) |x_1 - x_2| + c_2(t) (\|q_1 - q_2\| + \|p_1 - p_2\|) \end{aligned}$$

则方程(1) 存在唯一解.

要证定理 2, 需先证引理 2.

引理 2 若  $\tau$  是  $\mathcal{F}_t$ -停时(可无界),  $X$  是  $\mathcal{F}_\tau$  可测的  $\mathbf{R}^d$  值随机变量,  $f(t, \omega)$  是  $\mathcal{F}_t$  适应  $\mathbf{R}^d$

值随机过程, 使  $E|X|^2 < \infty, E \left| \int_0^\tau |f(s, \omega)| ds \right|^2 < \infty$ , 则以下方程(7) 存在唯一解.

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^\tau f(s, \omega) ds - \int_{t \wedge \tau}^\tau q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^\tau \int_Z p_s(z) N_k(dsdz), t \geq 0 \quad (7)$$

证明 令  $x_t = E\left[X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} f(s) ds \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}\right], M_t^{(T)} = E\left[X + \int_0^{T \wedge \tau} f(s) ds \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}\right], \forall T > 0$ . 由 Jensen 不等式, 得

$$E |M_t^{(T)}|^2 = E \left| E\left[X + \int_0^{T \wedge \tau} f(s) ds \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}\right] \right|^2 \leq E \left| X + \int_0^{T \wedge \tau} f(s) ds \right|^2 < \infty$$

因而  $M_t^{(T)}$  是平方可积鞅, 由鞅表示定理知存在唯一的

$$\left(q_t^{(T)}, p_t^{(T)}\right) \in L^2_{\mathcal{F}_t}([0, T]; \mathbf{R}^{d \otimes r}) \times \mathcal{F}_{k, \mathcal{F}_t}^2([0, T]; \mathbf{R}^d), \text{ 使得对 } 0 \leq t \leq T$$

$$M_t^{(T)} = E\left[X + \int_0^{T \wedge \tau} f(s) ds \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}\right] = M_0 + \int_0^{t \wedge \tau} q_s^{(T)} dw_s + \int_0^{t \wedge \tau} \int_{\mathcal{Z}} p_s^{(T)}(z) N_k(ds dz) \quad (8)$$

令  $q_t = q_t^{(T)}, p_t = p_t^{(T)}$ , 当  $0 \leq t \leq T$  时,  $\forall T > 0$ . 由唯一性知, 这一定义是不含混的, 当  $T \rightarrow \infty$  时,  $q_t^{(T)} \rightarrow q_t$  (在  $\mathbf{R}^{d \otimes r}$  中),  $p_t^{(T)} \rightarrow p_t$  (在  $L^2_{\mathcal{F}_t}(\mathbf{R}^d)$  中),  $\mu - a.e., \forall t \geq 0$ .

由条件期望性质及控制收敛定理得,  $M_t^{(T)} \rightarrow E\left[X + \int_0^{\tau} f(s) ds \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}\right] \triangleq M_t, (T \rightarrow \infty)$

故在 (8) 式两端令  $T \rightarrow \infty$ , 得  $M_t = M_0 + \int_0^{t \wedge \tau} q_s dw_s + \int_0^{t \wedge \tau} \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) N_k(ds dz), t \geq 0$

易得  $(q_t, p_t) \in L^2_{\mathcal{F}_t}([0, \tau]; \mathbf{R}^{d \otimes r}) \times \mathcal{F}_{k, \mathcal{F}_t}^2([0, \tau]; \mathbf{R}^d)$

$$\text{因 } M_t = E\left[X + \int_0^{\tau} f(s) ds \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau}\right] = x_t + \int_0^{t \wedge \tau} f(s) ds, \quad x_{\tau} = E[X \mid \mathcal{F}_{\tau}] = X$$

$$\text{故 } M_t = M_0 + \int_0^{\tau} q_s dw_s + \int_0^{\tau} \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) N_k(ds dz) = X + \int_0^{\tau} f(s) ds.$$

$$\text{所以 } X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} f(s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) N_k(ds dz) =$$

$$M_0 + \int_0^{t \wedge \tau} q_s dw_s + \int_0^{t \wedge \tau} \int_{\mathcal{Z}} p_s(z) N_k(ds dz) - \int_0^{t \wedge \tau} f(s) ds = M_t - \int_0^{t \wedge \tau} f(s) ds = x_t$$

这就证明了  $(x_t, q_t, p_t)$  满足方程 (7). 要证  $x_t \in S_{\mathcal{F}_t}$  可由鞅不等式、勒维引理及下式推出

$$E |x_0|^2 \leq 4E \left[ |X|^2 + \left| \int_0^{\tau} |f(s)| ds \right|^2 \right] + 4E \int_0^{\tau} \|q_s\|^2 ds + 4E \int_0^{\tau} \|p_s\|^2 ds < \infty.$$

因此  $(x_t, q_t, p_t)$  是方程 (7) 的解. 解的唯一性易由鞅不等式直接证得.

定理 2 的证明 运用压缩映像原理证明结论. 对于  $(x., q., p.) \in H$ , 令

$$\|(x., q., p.)\|_M^2 = \sup_{t \geq 0} e^{-bA(t)} E \left[ |x_{t \wedge \tau}|^2 + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \|q_s\|^2 ds + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \|p_s\|^2 ds \right]$$

其中,  $b \geq 0$  是待定常数,  $A(t) = \int_t^{\infty} [c_1(s) + c_2(s)^2] ds$ .

记  $H = \{(x., q., p.) \in H; \|(x., q., p.)\|_M < \infty\}$ , 则  $(H, \|\cdot\|_M)$  是 Banach 空间

给定  $(\bar{x}_i^j, \bar{q}_i^j, \bar{p}_i^j) \in H, (i = 1, 2)$ , 由引理 1 及 2, 存在唯一的  $(x_i^j, q_i^j, p_i^j) \in H, (i = 1, 2)$  满足

$$x_t^i = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} b[s, \bar{x}_s^i, \bar{q}_s^i, \bar{p}_s^i, \omega] ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s^i dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_{\mathcal{Z}} p_s^i(z) N_k(ds dz), t \geq 0.$$

记  $\hat{x}_s = x_s^1 - x_s^2$ , etc. 由 Ito 公式及条件 ③ 得

$$y_t \triangleq E \left[ |x_{t \wedge \tau}^1 - x_{t \wedge \tau}^2|^2 + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} (\|q_s^1 - q_s^2\|^2 + \|p_s^1 - p_s^2\|^2) ds \right] \leq$$

$$\gamma^{-1} I_t^1 + 2\gamma \int_t^{\infty} [c_1(s) + c_2(s)^2] \circ y_s ds$$

其中,  $\gamma > 0$  是 1 个常数,  $I_t^1 = E \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \left( c_1(s) |\dot{\bar{x}}_s|^2 + \|\dot{\bar{q}}_s\|^2 + \|\dot{\bar{p}}_s\|^2 \right) ds$ .

由 Gronwall 不等式

$$y_t \leq \gamma^{-1} I_t^1 + \int_t^{\infty} \exp \left[ 2\gamma \int_t^s \left( c_1(r) + c_2(r)^2 \right) dr \right] \cdot \left( c_1(s) + c_2(s)^2 \right) I_s^1 ds$$

用  $e^{-bA(t)}$  乘以上式右边两项, 分别将其放大再求和, 便可得

$$\left\| \left( \bar{x}^1 - \bar{x}^2, \bar{q}^1 - \bar{q}^2, \bar{p}^1 - \bar{p}^2 \right) \right\|_M^2 = \sup_{t \geq 0} e^{-bA(t)} y_t \leq \left( \gamma^{-1} + (b - 2\gamma)^{-1} \right) \cdot \left( c_1^0 + 1 \right) \left\| \bar{x}^1 - \bar{x}^2, \bar{q}^1 - \bar{q}^2, \bar{p}^1 - \bar{p}^2 \right\|_M^2$$

适当选取  $\gamma$  及  $b$ , 即得此映射为压缩映射. 由 Banach 不动点定理, 存在唯一点  $(x., q., p.) \in H$ , 满足方程 (1). 证完.

下面的例子表明条件 (H1) 是不能减弱的.

例 1 考虑方程 (一维情形)

$$x_t = X + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} |q_s| ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s(z) N_k(ds dz) \quad (9)$$

设  $U \in \mathcal{R}(Z)$ ,  $\Pi(U) < \infty$ ,  $0 < T < \infty$  为给定实数, 记  $f(t) = [(2+t) \ln(2+t)]^{-1}$ , 若取

$$X = \int_0^T f(s) dw_s + \int_0^T \int_Z f(s) I_U(z) N_k(ds dz) \triangleq I_1(0, T) + I_2(0, T)$$

又记  $I_3(a, b) = \int_a^b f(s) ds$ , 则方程 (9) 在  $\tau = \infty$ , a. s. 时的解  $(x_t, q_t, p_t)$  为

$$x_t = \begin{cases} X & (t > T) \\ I_1(0, t) + I_3(t, T) + I_2(0, t) & (t \leq T) \end{cases}$$

$$q_t = \begin{cases} 0 & (t > T) \\ f(t) & (t \leq T) \end{cases} \quad p_t = \begin{cases} 0 & (t > T) \\ f(t) I_U(z) & (t \leq T) \end{cases}$$

若取  $X = I_1(0, \infty) + I_2(0, T)$ , 则方程 (9) 在  $\tau = \infty$ , a. s. 时无解, 因为若有解, 则必有  $q_t = f(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ . 但  $\int_0^{\tau} |q_s| ds = \int_0^{\infty} f(s) ds = \ln \ln(2+s) \big|_0^{\infty} = \infty$ , 这是不可以的.

例 2 记号如上, 则方程

$$x_t = 1 + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} f(s) x_s ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s(z) N_k(ds dz), t \geq 0$$

在  $\tau = \infty$  时, a. s. 时无解. 事实上, 易知若上式有解, 则由鞅及有界变差过程的性质, 对  $\forall t \geq 0$ , 有  $q_t = 0$ ,  $p_t(z) = 0$ , 且  $x_t = \exp(I_3(t, \infty)) = \infty$ . 这是不可能的. 但对任意的平方可积随机变量  $\zeta$ , 方程

$$x_t = \zeta + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} f(s) q_s ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} q_s dw_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \int_Z p_s(z) N_k(ds dz), t \geq 0$$

满足定理 2 条件, 在  $\tau = \infty$  时, a. s. 时有解. 所以定理中对  $c_1(s)$ ,  $c_2(s)$  的要求应有所不同.

参考文献:

- [1] EL KAROUI N, PENG S, QUENNZ M C. Backward stochastic differential equations in finance [J]. Math Finance, 1997 (1): 1~71.
- [2] SITU R. Comparison theorem of solution to BSDE with jumps and viscosity solution to a generalized Hamilton-Jacobi-Bellman Equation [A]. In: ZHOU X, et al eds. Control of distributed parameter and stochastic systems

[C]. Kluwer, Boston, 1999. 275~282.

- [3] SITU R. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications [J]. Stoch Proc & Appl's, 1997, 66: 209~236.
- [4] 陈增敬. 带有停时的倒向随机方程解的存在性 [J]. 科学通报, 1997, 42 (22): 2379~2382.
- [5] SITU R. An application of local time to stochastic differential equation in  $m$ -dimensional space [J]. 中山大学学报论丛, 1984 (3): 1~12.

## On Solutions of BSDE with Jumps and with Unbounded Stopping Terminal

SITU Rong<sup>\*</sup>, Zeng Ai-ting

**Abstract:** For the backward stochastic differential equation with jumps, Lipschitz coefficients and unbounded stopping terminals the existence and uniqueness of an adapted solution are obtained. This paper also discusses some examples to show that the assumption of the theorems can not be weakened indeed.

**Keywords:** backward stochastic differential equation; Ito's formula; martingale inequality; Lipschitz condition; stopping time; adapted solution

### 《中国学术期刊(光盘版)检索与评价数据规范》说明(1)

根据中华人民共和国新闻出版署颁发的《中国学术期刊(光盘版)检索与评价数据规范(试行)》(CAJ—CD B/T 1—1998), 对国内正式出版的印刷版期刊为数据源开发制作的大型集成化全文数据库类连续出版物, 即《中国学术期刊(光盘版)》的入编期刊规范化、标准化提出的要求, 制定出相应的技术规范, 以利于大型数据库的建立以及对文献数据进行交换、处理、检索、评价和利用, 推动我国学术期刊文献信息交流现代化和文献计量学研究水平的提高. 为此, 本刊增加了一些项目和标识码, 下面简单介绍.

① 文章编号, 在全世界范围内是该篇文章的唯一标识. 其结构为: XXXX-XXXX (YYYY) NN-PPPP-CC. 其中, XXXX-XXXX 为文章所在期刊的国际标准刊号, YYYY 为文章所在期刊的出版年, NN 为文章所在期刊的期次, PPPP 为文章首页所在的期刊页码, CC 为文章页数.

② 文献标识码, 是为便于文献的统计和期刊评价, 确定文献的检索范围, 提高检索结果的适用性, 每一篇文章或资料应标识一个文献标识码. 本刊刊登的文章主要是 A 类, 为理论与应用研究学术论文, 包括综述报告.

③ 作者英文姓名的姓氏全部字母均大写, 复姓应连写; 名字的首字母大写, 双名中间加连字符, 姓氏与名均不缩写. 外国作者的姓名遵从国际惯例.

(本刊通讯员)

\* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China