

非交换紧零维群上的 Fourier 级数的收敛^{*}

邹 进

吴忆贫

(中山大学数学系, 广州 510275) (四川乐山师专数学系)

摘 要 研究非交换紧零维群上的不可约酉表示的特征和 Fourier 级数的收敛性.

关键词 零维解, 酉表示, Fourier 级数

分类号 O 152. 6, O 174. 21

设 G 是紧的、可距离化的、零维无限群, 这等价于 G 是紧的、可距离化的、完全不连通的无限群. 文 [1] 已证明存在 G 的一列开紧正规子群 $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足① $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n = G$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{e\}$; ② 对每个 n , G_n 是 G_{n-1} 的正规子群; ③ $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是单位元素 e 的一组邻域基.

引理 1 假设 U 是 G 上的 1 个不可约酉表示, 则存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得当 $g \in G_k$ 时, U_g 是恒等变换.

证明 设酉表示 U 的维数是 m , 表示空间为 H , 在 H 中选择 1 组标准正交基, 则 U_g 对应于 1 个 m 阶酉矩阵 $\left(u_{i,j}(g)\right)$. 对每个 $g \in G$, 存在酉矩阵 $A(g)$, 使得 $A^{-1}(g) \left(u_{i,j}(g)\right) A(g) = \left(\lambda_{i,i}(g)\right)$ 为对角形矩阵, 其中对角线上的元素 $\lambda_{i,i}(g)$ 是 U_g 的特征根并且 $|\lambda_{i,i}(g)| = 1$.

因为 $\left(\lambda_{i,i}(g)\right) - I_m = A^{-1}(g) \left[\left(u_{i,j}(g) - u_{i,j}(e)\right)\right] A(g)$ 和 $A(g)$ 中的元素 $a_{i,j}(g)$ 满足 $|a_{i,j}(g)| \leq 1$, 所以当 $k \leq m$ 时

$$|\lambda_{i,i}(g) - 1| = \left| \sum_{j,k} \bar{a}_{j,i}(g) \left(u_{j,k}(g) - u_{j,k}(e)\right) a_{ki}(g) \right| \leq \sum_{j,k} |u_{j,k}(g) - u_{j,k}(e)|$$

又由 $u_{i,j}(g)$ 在单位元 e 处连续知存在 n_0 , 使得对所有的 $g \in G_{n_0}$ 和 $k \leq m$ 成立

$$|\lambda_{i,i}(g) - 1| < 1/3$$

从而对所有 $k \in \mathbb{N}$, $g \in G_{n_0}$ 和 $k \leq m$ 有

$$|\lambda_{i,i}(g)^l - 1| < 1/3$$

上式与 $|\lambda_{i,i}(g)| = 1$ 即可推出任意 $g \in G_{n_0}$, $k \leq m$, $\lambda_{i,i}(g) = 1$ 成立.

所以当 $g \in G_{n_0}$ 时, $\left(u_{i,j}(g)\right) = A(g) \left(\lambda_{i,i}(g)\right) A^{-1}(g) = I_m$.

令 Γ 是 G 的所有不等价的不可约矩阵酉表示的集合, 对第 k 个 $k \in \mathbb{Z}$, 让 Γ_n 表示 G_n 的零化子, 即 $\Gamma_n = \{U \in \Gamma, U_g = I_{d(U)}, \forall g \in G_n\}$. 由引理 1 可得到:

$$(1) \{1\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_n \subset \dots$$

$$(2) \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma$$

* 收稿日期: 1997-09-14 邹 进, 男, 36岁, 博士研究生

设 μ 是 G 的不变正规 Haar 测度, p_n 表示商群 G_{n-1}/G_n 的阶, 令 $m_0=1$, $m_k=\prod_{n=1}^k p_n$, 则

$\mu(G_k)=1/m_k$. 对每个 $f \in L^1(G)$, 定义 f 的 Fourier 级数^[2]为

$$\int_G f(g) d\mu(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}} d(\lambda) \sum_{i,j=1}^{d(\lambda)} \left(f, \tilde{u}_{i,j}^{\lambda} \right) \tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g)$$

并且称

$$S_n(f)(g) = (f, 1) + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\lambda \in \Gamma_m \setminus \Gamma_{m-1}} d(\lambda) \sum_{i,j=1}^{d(\lambda)} \left(f, \tilde{u}_{i,j}^{\lambda} \right) \tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g) =$$

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_{n-1}} d(\lambda) \sum_{i,j=1}^{d(\lambda)} \left(f, \tilde{u}_{i,j}^{\lambda} \right) \tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g)$$

为 f 的 Fourier 级数的 n 项部分和.

由 $\tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(gx^{-1}) = \text{Tr} \mathbf{U}_{gx^{-1}}^{\lambda} = \sum_{i,j=1}^{d(\lambda)} \tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(x) \tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g)$ 得到

$$S_n(f)(g) = \int_G D_n(gx^{-1}) f(x) d\mu(x) = \int_G D_n(g) f(x^{-1}g) d\mu(x)$$

其中, $D_n(g) = \sum_{\lambda \in \Gamma_{n-1}} d(\lambda) \tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g)$ 是 Dirichlet 核.

引理 2 $D_n(g) = m_n a_{G_n}(g)$, $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$

证明 因为 G 上的函数 $D_n(g)$, $m_n a_{G_n}(g)$ 的值由 g 所在的陪集 gG_n 唯一确定, 因此可作商群 G/G_n 上的函数

$$\tilde{D}_n(\tilde{g}) \triangleq D_n(g), \quad \tilde{a}_n(\tilde{g}) \triangleq a_{G_n}(g)$$

容易验证 $\tilde{D}_n(\tilde{g})$, $\tilde{a}_n(\tilde{g})$ 是 G/G_n 上的类函数.

令 $\tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(\tilde{g}) \triangleq \tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g)$, 则 G/G_n 上的任何一个不可约特征标均与 $\{\tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(\tilde{g})\}_{\lambda \in \Gamma_{n-1}}$ 中的某一个线性等价, 又因为当 $\lambda \in \Gamma_{n-1}$ 时

$$\frac{1}{m_n} \sum_{\tilde{g} \in G/G_n} \left(\tilde{D}_n(\tilde{g}) - m_n \tilde{a}_n(\tilde{g}) \right) \overline{\tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(\tilde{g})} = \int_G \left(D_n(g) - m_n a_n(g) \right) \overline{\tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g)} d\mu(g) =$$

$$d(\lambda) - m_n \int_{G_n} \overline{\tilde{u}_{i,j}^{\lambda}(g)} d\mu(g) = d(\lambda) - d(\lambda) = 0$$

所以有限群 G/G_n 上的类函数 $\tilde{D}_n(\tilde{g}) - m_n \tilde{a}_n(\tilde{g})$ 与 G/G_n 上的每个不可约特征标正交, 于是由文 [3] 得到 $\tilde{D}_n(\tilde{g}) - m_n \tilde{a}_n(\tilde{g})$ 在 G/G_n 上恒为零. 所以

$$D_n(g) = m_n a_{G_n}(g) \quad g \in G, \quad n \in \mathbb{N}$$

定理 1 ① 若 $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, 则 $S_n(f)$ 在 $L^p(G)$ 中收敛于 f ; ② 若 f 在 G 上连续, 则 $S_n(f)$ 一致收敛于 f ; ③ 若 f 在 g_0 点连续, 则 $S_n(f)(g_0)$ 收敛于 $f(g_0)$.

利用 $S_n(f)(g) - f(g) = \int_G \left(f(x^{-1}g) - f(g) \right) D_n(x) d\mu(x)$ 即可得到定理 1 的证明, 此略.

设 $X(G)$ 表示 $L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) 或 $C(G)$, 以及

$$\|x\| = \begin{cases} 0 & \text{当 } x = e \text{ 时;} \\ 1/m_n & \text{当 } x \in G_n \setminus G_{n+1} \end{cases}$$

称 $f \in \text{Lip}^{\tau}(\Gamma, X(G))$ ($\tau > 0$), 当且仅当

$$\sup_{y \in G} \left\| \left(f(y^{-1} \circ) - f(\circ) \right) / \|y\|^{\tau} \right\|_{X(G)} = C < \infty;$$

$f \in \text{Lip}^{\tau}(\Gamma, X(G))$, 当且仅当

$$\sup_{y \in G} \| (f(\cdot y^{-1}) - f(\cdot)) / |y|^T \|_{X(G)} = C < \infty.$$

定理 2 设 $0 < \tau \leq 1$, 则 $f \in \text{Lip}^\tau(T, X(G))$ (或 $f \in \text{Lip}^\tau(T, X(G))$) 的充要条件是 $\|S_n(f) - f\|_{X(G)} = O(1/m_n^T)$.

证明 因为

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_{X(G)} &= \left\| \int_G (f(x^{-1} \cdot) - f(\cdot)) D_n(a) d_-(a) \right\|_{X(G)} \leq \\ m_n \int_{G_n} \|f(x^{-1} \cdot) - f(\cdot)\|_{X(G)} d_-(a) &\leq C m_n \int_{G_n} |a|^T d_-(a) \leq (1/m_n)^T \end{aligned}$$

反之对任何 $g \in G$, 不妨假定 $|y| = 1/m_n$, 则

$$\begin{aligned} \|f(y^{-1} \cdot) - f(\cdot)\|_{X(G)} &\leq \|f(y^{-1} \cdot) - S_n(f)(y^{-1} \cdot)\|_{X(G)} + \\ \|S_n(f)(y^{-1} \cdot) - S_n(f)(\cdot)\|_{X(G)} &+ \|S_n(f)(\cdot) - f(\cdot)\|_{X(G)} \leq \\ C \left(\frac{1}{m_n} \right)^T + \left\| \int_G [D_n(y^{-1} \cdot x^{-1}) - D_n(\cdot x^{-1})] f(a) d_-(a) \right\|_{X(G)} \end{aligned}$$

因为上式中 $D_n(y^{-1} x^{-1})$ 与 $D_n(x^{-1})$ 对所有 $x \in G$ 均相等, 所以上式中后一项等于零. 故

$$\|f(y^{-1} \cdot) - f(\cdot)\|_{X(G)} \leq C \left(\frac{1}{m_n} \right)^T = C |y|^T$$

即 $f \in \text{Lip}^\tau(T, X(G))$.

在 G 上定义 $d(x, y) = |xy^{-1}|$, $\forall x, y \in G$, 则容易验证 d 是 G 上的一个距离, 若假设 $\sup_n \{p_n\} < \infty$, 则 G 关于这个距离 d 还是一个齐型空间^[4]. 利用 Hardy-Littlewood 极大算

子 $Mf(x) = \sup_n m_n \int_{xG_n} |f(a)| d_-(a)$ 是弱 $(1, 1)$ 型的. 立即可以推出下面定理 3.

定理 3 若 $f \in L^1(G)$, 则 $S_n(f)$ 在 G 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

参 考 文 献

- 1 邦德列雅金. 连续群: 上册. 北京: 科学出版社, 1978. 145
- 2 Sugiura M. Unitary representations and harmonic analysis. New York: Halsted Press, 1975. 1
- 3 Serre J P. 有限群的线性表示. 北京: 科学出版社, 1984. 19~ 21
- 4 Coifman R R, Weiss G. Extensions of Hardy space and their use in analysis. Bull Amer Math Soc, 1977, 83: 569~ 645

Convergence of Fourier Series on Non-Abelian Compact 0-Dimensional Groups

Zou Jin* Wu Yipin

Abstract The characters of irreducible unitary representations of non-Abelian compact 0-dimensional groups and the convergence of Fourier series are studied.

Keywords 0-dimensional group, unitary representation, Fourier series

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China