第 37卷 第 5期
1998年 9月

中山大学学报 (自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 37 No. 5
Sep. 1998

具有双扰动数据非线性算子方程解的误差*

凌 捷
(中山大学科学计算与计算机应用系，广州 510275)

摘 要 对算子和右端都有扰动的非线性第一类算子方程，证明了正则解的几个误差估计公式，并给出了达到最优误差界的阶的正则参数的选取方法.

关键词 非线性算子方程，Tikhonov正则化，收敛速率
分类号 O 175.3

1 问题的提法

设 X，Y为 Hilbert空间，$F: D(F)\subset X\to Y$为非线性连续算子.考虑如下算子方程

$$F(x)=y,\qquad x\in X,\ y\in Y \tag{1}$$

求解方程 (1) 的问题是不适定的. 由于算子 F是非线性的，方程 (1) 的解一般不唯一. 我们考虑其 x^*-极小范数解 (简记为 x^*-MNS) $\hat{x}$，即 $\hat{x}$应满足 $F(\hat{x})=y$和 $\|\hat{x}-x^*\|=\min\{\|x-x^*\|;\ x\in D(F), F(x)=y\}$. 问题的 x^*-MNS也不一定唯一，元素 $x^*\in X$起着选择准则的作用，通过先验选择 x^*，可以影响所要逼近的解. 为处理不适定性，须将问题 (1) 正则化. 最著名和有效的方法之一是 Tikhonov正则化，它是将问题 (1) 的解用极小化问题：$\min\|F(x)-y^\delta\|^2+\alpha\|x-x^*\|^2,\ x\in D(F)$的解来近似，其中 $\alpha>0$为正则参数，$y^\delta\in Y$为可用的带扰动数据，且满足 $\|y-y^\delta\|\leqslant\delta$，$\delta>0$为已知的扰动水平，$x^*$为未知解的一个适当的近似.

文 [1] 讨论过非线性算子方程的 Tikhonov正则解的稳定性和收敛性，文 [2] 则给出了正则解收敛速率为 $O(\sqrt{\delta})$的条件，文 [3]给出了保证正则解收敛速率为 $O(\delta^{2/3})$的条件，并证明了 $O(\delta^{2/3})$是能达到的最好的可能收敛速率. 文 [4, 5] 给出了正则解的误差估计以及达到最优误差界的阶的正则化参数的选择方法.

上述结果都是在算子方程右端近似给定，而算子精确已知的情形下考虑的. 但是，在许多实际问题中，算子 F一般也是经测量而获得的近似值. 一个典型的例子是算子及右端都是近似已知的重力测量反问题[6].

算子和右端都带有扰动误差的算子方程这里称为具有双扰动数据的算子方程. 对双扰动的非线性算子方程，目前已有的结果主要是证明了 Tikhonov正则解的收敛性，并对某些

* 国家教委博士点专项基金 (96055818) 资助项目
收稿日期：1998-01-05 凌捷，男，34岁，副教授，现在广东工业大学计算机系工作

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

特定的算子，作出了近似解的收敛阶的估计[1]. 本文进一步进行这一方面的研究，证明了在算子满足不同条件和解满足一定的光滑性条件时正则解的几个误差估计公式，并给出了使正则解达到最优收敛阶的正则参数的选择方法.

2 误差的估计与参数选择

设 $\bar{x}\in D(F)$为 $F(x)=\bar{y}$的一个解，其中 $\bar{y}\in Y$为精确的右端，$y^{\delta}\in Y$为满足$\|\bar{y}-y^{\delta}\|\leqslant\delta$的带扰动误差的右端，对实数 $h\geqslant 0$，设 $F_h: X\to Y$为非线性扰动算子(当 $h=0$时，认为$F_0=F$)，并满足：$\|F(x)-F_h(x)\|\leqslant h\psi(\|x\|_X)$，其中 $\psi(t)$是 $t\geqslant 0$的非负、单调不减的连续函数，若 F，F_h 为线性算子，则取 $\psi(t)=t$. 记 $\gamma=(h,\delta)$，相应于问题 (1) 的近似方程为

$$F_h(x)=y^{\delta} \tag{2}$$

问题 (2) 也是不适定的，其 Tikhonov 正则解由解极小化问题

$$\inf_{x\in D} J_{\alpha,\gamma}(x),\quad J_{\alpha,\gamma}(x)=\|F_h(x)-y^{\delta}\|^2+\alpha\|x-x^*\|^2 \tag{3}$$

获得. 其中，$\alpha>0$为正则参数，$D=D_F\cap D_{F_h}$，x^*为未知解的一个适当的近似.

记 $x_\alpha^{\delta,h}$ 为问题 (3) 的解，$\psi_0=\psi(\|\bar{x}\|)$. 以下假设:

(1) 存在 $\bar{x}\in D$使$\|F(\bar{x})-y^{\delta}\|\leqslant\delta$;

(2) 对 $\alpha>0$，$h\geqslant 0$，问题(3)可解，且其解 $x_\alpha^{\delta,h}$对所有 $x\in D$满足 $J_{\alpha,\gamma}(x_\alpha^{\delta,h})\leqslant J_{\alpha,\gamma}(x)$;

(3) 存在线性算子 $H: X\to Y$及常数 $K\geqslant 0$及元素 $w\in Y$使得：① 当$x\in D$且满足$\|x-\bar{x}\|\leqslant(\delta+h\psi_0)/\sqrt{\alpha}+2\|\bar{x}-x^*\|$时，$\|F_h(x)-F_h(\bar{x})-H(x-\bar{x})\|\leqslant K/2\|x-\bar{x}\|^2$成立；② $x^*-\bar{x}=H^*w$，其中，H^*为 H的共轭算子；③ $K\|w\|<1$.

定理 1 如果条件 (1) ~ (3) 满足，则有如下误差估计式

$$\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|\leqslant(\delta+h\psi_0+\alpha\|w\|)/(\sqrt{\alpha}\sqrt{1-K\|w\|}) \tag{4}$$

证明 由 $J_{\alpha,\gamma}(x_\alpha^{\delta,h})\leqslant J_{\alpha,\gamma}(\bar{x})$可得

$$\|F_h(x_\alpha^{\delta,h})-y^{\delta}\|^2+\alpha\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2\leqslant\|F_h(\bar{x})-y^{\delta}\|^2+2\alpha(x^*-\bar{x},x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}) \tag{5}$$

忽略上式左端第 1项则有

$$\alpha\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2\leqslant(\|F_h(\bar{x})-F(\bar{x})\|+\|F_h(\bar{x})-y^{\delta}\|)^2+2\alpha(x^*-\bar{x},x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x})$$

故有 $$\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|\leqslant(\delta+h\psi_0)/\sqrt{\alpha}+2\|\bar{x}-x^*\|$$

又可证得

$$\|F_h(x_\alpha^{\delta,h})-y^{\delta}-\alpha w\|^2+\alpha\|x_\alpha^{\delta,h}-x\|^2\leqslant(h\psi_0)^2+2h\psi_0\delta+\|F(x)-y^{\delta}-\alpha w\|^2+$$
$$2\alpha(w,H(x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x})+F(\bar{x})-F_h(x_\alpha^{\delta,h}))$$

故有 $$\alpha\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2\leqslant(h\psi_0+\delta+\alpha\|w\|)^2+\alpha K\|w\|\cdot\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2$$

移项后即得 (4) 式.

推论 1 在定理 1的条件下，若按准则 $\alpha=(\delta+h\psi_0)/\|w\|$ 选择正则参数，则有

$$\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|=O((\delta+h)^{1/2})$$

以下给出假设 (4)，与这一假设类似的想法来自文 [7].

(4) 存在线性算子 $H: X\to Y$及常数 $L>0$及元素 $w\in Y$使① 对所有 $x\in D$，$\|x-\bar{x}\|\leqslant(\delta+h\psi_0)/\sqrt{\alpha}+2\|\bar{x}-x^*\|$，有 $L\|H(x-\bar{x})\|\leqslant\|F_h(x)-F_h(\bar{x})\|$；② $x^*-\bar{x}=H^*w$.

定理 2 若假设条件 (1)，(2) 及 (4) 满足，则有

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

$$\| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \| \leqslant (\delta + h\eta_0) / \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} \| w \| / L .$$

证明　由 (5) 式及不等式 $\| F_h(\bar{x}) - y^\delta \| \leqslant \| F_h(\bar{x}) - F(\bar{x}) \| + \| F(\bar{x}) - y^\delta \|$ 可推得

$$\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \|^2 + \alpha \| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \|^2 \leqslant (h\eta_0 + \delta)^2 + 2\alpha \| w \| \cdot \| H(x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x}) \| \leqslant$$

$$(h\eta_0 + \delta)^2 + 2\alpha (h\eta_0 + \delta) \| w \| / L + 2\alpha \| w \| / L \cdot \| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \|$$

又利用不等式 $2ab \leqslant a^2 + b^2$, 则可得

$$\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \|^2 + \alpha \| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \|^2 \leqslant (h\eta_0 + \delta + \alpha \| w \| / L)^2 + \| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \|^2$$

于是定理结论成立.

推论 2　在定理 2的条件下, 若按准则 $\alpha = L(\delta + h\eta_0) / \| w \|$ 选择正则参数, 则有 $\| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \| = O((\delta + h)^{1/2})$.

定理 3　若假设 (1), (2) 及 (4, ①) 满足, 又设 $x^* - \bar{x} = (H^* H)^p v$, 其中, $0 < p \leqslant 1/2$, $v \in X$, 则有误差估计

$$\| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \| \leqslant \max \left\{ \frac{\sqrt{2}(h\eta_0 + \delta)}{\sqrt{\alpha}}, (4 \| v \|)^{\frac{1}{2p+1}} \cdot \left(\frac{2h\eta_0 + 2\delta}{L} \right)^{\frac{2p}{2p+1}}, 2 \| v \| \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{L} \right)^{2p} \right\}$$

证明　由式 (5) 及条件 $x^* - \bar{x} = (H^* H)^p v$ 有

$$\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \|^2 + \alpha \| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \|^2 \leqslant (h\eta_0 + \delta)^2 + 2\alpha \| v \| \cdot \| (H^* H)^p (x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x}) \|$$

又对自共轭正算子 B 有插值不等式[7]: $\| B^r x \| \leqslant \| B^s x \|^{r/s} \| x \|^{1-r/s}$, $0 \leqslant r \leqslant s$, 于该不等式中取 $B = H^* H$, $r = p$, $s = 1/2$, 再由条件 (4, ①) 可得

$$\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \|^2 + \alpha \| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \|^2 \leqslant$$

$$(h\eta_0 + \delta)^2 + 2\alpha \| v \| \left(\frac{\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| + h\eta_0 + \delta}{L} \right)^{2p} \| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \|^{1-2p} \tag{6}$$

对上式分 2种情形讨论:

情形 1: 设 $\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| \leqslant \delta + h\eta_0$, 则有

$$\alpha \| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \|^2 \leqslant (h\eta_0 + \delta)^2 + 2\alpha \| v \| \left(\frac{2h\eta_0 + 2\delta}{L} \right)^{2p} \| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \|^{1-2p}.$$

注意到由 $\{t^2 \leqslant b_1 + b_2 t^s, s < 2, t, b_1, b_2 > 0\}$ 可得 $t \leqslant \max\{(2b_1)^{1/2}, (2b_2)^{1/(2-s)}\}$, 于是有

$$\| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \| \leqslant \max \left\{ \frac{\sqrt{2}(h\eta_0 + \delta)}{\sqrt{\alpha}}, (4 \| v \|)^{\frac{1}{2p+1}} \cdot \left(\frac{2h\eta_0 + 2\delta}{L} \right)^{\frac{2p}{2p+1}} \right\} \tag{7}$$

情形 2　设 $\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| \geqslant \delta + h\eta_0$, 则可得

$$\| x_\alpha^{\delta,h} - \bar{x} \| \leqslant (2 \| v \|)^{\frac{1}{2p+1}} \left(\frac{\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| + h\eta_0 + \delta}{L} \right)^{\frac{2p}{2p+1}} \tag{8}$$

忽略式 (6) 左端第 2项后将 (8) 式代入得

$$\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \|^2 \leqslant (h\eta_0 + \delta)^2 + \alpha (2 \| v \|)^{\frac{2}{2p+1}} \left(\frac{\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| + h\eta_0 + \delta}{L} \right)^{\frac{4p}{2p+1}}$$

记　$$t = \frac{\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| + h\eta_0 + \delta}{L}$$

则有　$$t^2 \leqslant \frac{2(h\eta_0 + \delta)}{L} t + \frac{\alpha (2 \| v \|)^{\frac{2}{2p+1}}}{L^2} t^{\frac{4p}{2p+1}}$$

又注意到由 $\{t^2 \leqslant b_1 t + b_2 t^s, s < 2; t, b_1, b_2 > 0\}$ 可得 $t \leqslant \max\{2b_1, (2b_2)^{1/(2-s)}\}$, 于是

$$\frac{\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| + h\eta_0 + \delta}{L} \leqslant \max \left\{ \frac{4(h\eta_0 + \delta)}{L}, 2 \| v \| \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{L} \right)^{2p+1} \right\}$$

代回式 (8)得, 当 $\| F_h(x_\alpha^{\delta,h}) - y^\delta \| \geqslant \delta + h\eta_0$ 时有

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w

$$\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|\leqslant\max\left\{(2\|v\|)^{\frac{1}{2p+1}}\left[\frac{4(h\gamma_0+\delta)}{L}\right]^{2p/(2p+1)},\ 2\|v\|\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{L}\right)^{2p}\right\}\tag{9}$$

又由于 $0<p\leqslant 1/2$时

$$(2\|v\|)^{\frac{1}{2p+1}}\left[\frac{4(h\gamma_0+\delta)}{L}\right]^{\frac{2p}{2p+1}}\leqslant(4\|v\|)^{\frac{1}{2p+1}}\left[\frac{2(h\gamma_0+\delta)}{L}\right]^{\frac{2p}{2p+1}}$$

故由式 (7) 与 (9) 即可得定理结论.

推论 3 设定理 3的条件满足, 又设对给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\alpha>0$使

$$\delta+h\gamma_0\leqslant\|F_h(x_\alpha^{\delta,h})-y^\delta\|\leqslant(1+\varepsilon)(\delta+h\gamma_0)\tag{10}$$

则按(10)式后验地选择正则化参数 α时,有误差估计: $\|x_\alpha^{\delta,h}-x\|=O((\delta+h)^{2p/(2p+1)})$.

易见, 由推论 1~3得到收敛速率 $\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|=O((\delta+h)^{1/2})$. 为了提高正则解的收敛速率, 再给出假设

(5) 存在线性算子 $H: X\to Y$及元素 $v\in X$使: ① $x^*-\bar{x}=H^*Hv$; ② $\bar{x}+\alpha v\in D$; ③ 条件 (3, ①) 对 $x\in D$及 $\|x-\bar{x}\|\leqslant\alpha\|v\|$ 成立.

定理 4 若条件 (1) ~ (3) 及 (5) 满足, 则有误差估计

$$\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|\leqslant\frac{h\gamma_0+\delta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{1-K\|w\|}}+\frac{\alpha\|v\|\left(\sqrt{\alpha}K\|v\|+2\sqrt{1+K\|w\|}\right)}{2\sqrt{1-K\|w\|}}.$$

证明 不难证得

$$\|F_h(x_\alpha^{\delta,h})-y^\delta-\alpha Hv\|^2+\alpha\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2\leqslant\|F_h(\bar{x}+\alpha v)-y^\delta\|^2-\alpha^2\|Hv\|^2+$$
$$\alpha^3\|v\|^2+2\alpha(H(x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x})-F_h(x_\alpha^{\delta,h})+y^\delta,Hv),$$

故有 $\alpha(1-K\|w\|)\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2\leqslant\|F_h(\bar{x}+\alpha v)-y^\delta\|^2-\|F_h(\bar{x})-y^\delta+\alpha Hv\|^2+$
$\alpha^3\|v\|^2+\|F_h(\bar{x})-y^\delta\|^2$

再应用不等式 $\|u\|^2-\|v\|^2\leqslant\|u+v\|\circ\|u-v\|$ 可得

$$\alpha(1-K\|w\|)\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2\leqslant(K\|\alpha v\|^2/2+2\|F_h(\bar{x})-y^\delta\|+2\|\alpha Hv\|)\circ$$
$$K\|\alpha v\|^2/2)+(h\gamma_0+\delta)^2+\alpha^3\|v\|^3$$

注意到 $\|Hv\|^2=(v,H^*w)=(Hv,w)$, 利用 Schwarz不等式, 则有 $\|Hv\|\leqslant\|w\|$, 于是 $\alpha(1-K\|w\|)\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|^2\leqslant(h\gamma_0+\delta+K\|\alpha v\|^2/2)^2+\alpha^3\|v\|^2(1+K\circ\|w\|)$,移项后即可得定理的结论.

推论 4 在定理 4的条件下,若按 $\alpha=c(\delta+\gamma_0h)^{2/3}$选择正则化参数($c>0$为常数), 则有 $\|x_\alpha^{\delta,h}-\bar{x}\|=O((h+\delta)^{2/3})$.

在定理 1~4中, 令 $h=0$, 则为右端近似而算子是精确给定的非线性算子方程的情形, 此时上述定理结论即为文 [4]的结果, 本文考虑算子和右端都近似给定的情形, 更接近于实际问题的模型.

致谢: 感谢导师李岳生教授的悉心指导.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

参 考 文 献

1 Seidman T I, Vogel C R. Well-posedness and convergence of some regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Inverse Problems, 1989 (5): 227~ 238

2 Engl H W, Kunisch K, Neaubauer A. Convergence rates for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems. Inverse Problems, 1989 (5): 523~ 540

3 Neubauer A. Tikhonov regularization methods of nonlinear ill posed problems: optimal convergence rates and finite dimensional approximation. Inverse Problems, 1989 (5): 541~ 557

4 Kohler J, Tautenhahn U. Error bound for regularization solutions of nonlinear ill-posed problems. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 1995 (3): 47~ 74

5 Tautenhahn U. Error estimates for regularized solutions of nonlinear ill-posed problems. Inverse Problems, 1994 (10): 485~ 500

6 Tikhonov A N, Aresenin V Y. Solution of ill-posed problems. New York: Wiley, 1977. 10~ 12

7 Schroter T, Tautenhahn U. Error estimates for Tikhonov regularization in Hilbert scales. Numer Funct Anal Optimiz, 1994 (15): 155~ 168

Error Estimates for Regularization Solutions of Nonlinear Operator Equations with Perturbed Operators and Noisy Data

Ling Jie[*]

Abstract　Tikhonov regularization method for solving nonlinear operator equations of the first kind with perturbed operators and noisy data is considered. Under certain conditions for the nonlinear operator and the smoothness of the solution, some formulas for estimating the errors of the regularized solutions and some parameter choice strategies that yield regularized solutions with optimal error bounds are given.

Keywords　nonlinear operator equations, Tikhonov regularizing, convergence rate

[*] Department of Scientific Computing and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w