

Lé nard 方程半稳定极限环的计算^{*}

陈树辉 黄武林 徐 兆

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要 应用摄动 增量法研究 Lé nard 半稳定极限环及其分叉值的计算: 首先用非线性时间变换法把微分方程化为积分方程, 然后用摄动法求出 $\lambda \approx 0$ 时的初始解, 最后用增量法求出参数 λ 任意给定时的新解. 实例表明此种方法是有效的.

关键词 Lé nard 方程, 半稳定极限环, 分叉值, 摄动 增量法

分类号 O 322

关于 Lé nard 方程

$$\ddot{x} + g(x) = \lambda f(x, \dot{x}, _)\dot{x} \quad (1)$$

极限环的定性问题已有很多研究工作^[1,2], 而定量问题的研究相对来说做得较少. 常用的数值积分法对稳定极限环尚可应用, 对不稳定极限环, 经时间变换为稳定极限环后也可应用, 而对于半稳定极限环及其对应的分叉值的计算则很难应用. 文 [3] 指出这是一个困难的问题. 近年来有一种计算极限环的新方法, 称为摄动 增量法^[4], 它把分析法和数值法相结合兼有两者的优点. 文 [5] 应用这种新方法得到极限环 分界线环及其分叉值的很好结果. 本文将进一步推广应用这个方法研究 Lé nard 方程 (1) 的半稳定极限环并提供极限环振幅与参数的关系曲线, 有了这条曲线可以知道在给定参数范围内极限环的个数及其稳定性. 它为研究极限环的大范围分布提供了一条新途径.

1 极限环振幅与参数的关系曲线

在方程 (1) 中假设 $g(0) = 0$ 并满足文 [6] 存在极限环的条件. 作非线性时间变换

$$dh/dt = H(h), \quad H(h \pm 2\pi) = H(h) \quad (2)$$

其中, h 是新时间, 在 h 域内把极限环表示为

$$x = a \cos h \pm b, \quad dx/dt = -a H(h) \sin h \quad (3)$$

这里 a 是振幅, b 是偏心, 方程 (1) 可改写为

$$H \frac{d}{dh} (Hx') + g(x) = \lambda f(x, Hx', _) Hx' \quad (4)$$

式中, $x' = dx/dh = -a \sin h$ 在方程 (4) 两边乘以 x' 然后积分得

* 中山大学高等学术中心基金 (98M9) 资助项目

收稿日期: 1998-04-03 陈树辉, 男, 53 岁, 教授

$$-\frac{1}{2}(H \sin h)^2 + \bar{V}(a, b, h) - \lambda \int_0^h \bar{f}(a, b, _, H, \theta) d\theta = 0 \quad (5)$$

其中

$$V(x) = \int_0^x g(u) du \quad (6)$$

$$\bar{V}(a, b, h) = [V(a \cos h + b) - V(a + b)]/a^2 \quad (7)$$

$$\bar{f}(a, b, _, H, \theta) = f(a \cos \theta + b, -aH(\theta) \sin \theta, _)H(\theta) \sin^2 \theta \quad (8)$$

对于方程 (5) 分别令 $h = \pi$ 和 $h = 0$ 得

$$\bar{V}(a, b, \pi) - \lambda \int_0^\pi \bar{f}(a, b, _, H, \theta) d\theta = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^\pi \bar{f}(a, b, _, H, \theta) d\theta = 0 \quad (10)$$

由 (5), (9) 和 (10) 式, 如果求得 a , b 和 H , 则得到极限环的表达式.

$$\text{如果 } g(-x) = -g(x), \quad f(-x, -\dot{x}, _) = f(x, \dot{x}, _) \quad (11)$$

则以 $(-x, -\dot{x})$ 代替 $(x, \dot{x})$, 方程 (1) 不变. 因此, 极限环关于原点对称的.

于是 $x(h + \pi) = -x(h)$, $\dot{x}(h + \pi) = -\dot{x}(h)$

$$\text{由 (3) 式得 } b = 0, \quad H(h + \pi) = H(h) \quad (12)$$

假设 $\lambda \approx 0$, 则由 (5), (9) 和 (10) 式得极限环的近似解 a_0 , b_0 和 H_0 满足下列方程

$$H_0(h) = [-2\bar{V}(a_0, b_0, h)]^{1/2} \quad (13)$$

$$\bar{V}(a_0, b_0, \pi) = 0 \quad (14)$$

$$\int_0^\pi \bar{f}(a_0, b_0, _, H_0, \theta) d\theta = 0 \quad (15)$$

当给定 a_0 , 由以上 3 式可得 $_ = _ (a_0)$, 即极限环的振幅 a_0 与参数 $_$ 的关系式, 其曲线称为极限环振幅曲线. 根据振幅曲线可得到在给定参数范围内极限环的个数. 当给定 $_$, 则由方程 (13) ~ (15) 可得极限环的近似解.

如果 λ 不是小参数, 则可用增量法求解. 对参数 λ 给一个小增量 $\Delta\lambda$, 那么相应应有 Δa , Δb , $\Delta _$ 和 ΔH . 令

$$\lambda = \Delta\lambda, \quad a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad _ = _0 + \Delta _, \quad H = H_0 + \Delta H$$

则由式 (5), (9) 和 (10) 可得增量方程. 由于 $H(h)$ 是 2π 周期函数, 故可展开为 Fourier 级数

$$H(h) \approx P_0 + \sum_{k=1}^M (P_k \cos kh + Q_k \sin kh)$$

只要 M 充分大, $H(h)$ 就有足够的精度. 同样, ΔH 可展开为

$$\Delta H(h) \approx \Delta P_0 + \sum_{k=1}^M (\Delta P_k \cos kh + \Delta Q_k \sin kh)$$

把增量方程中的周期函数都展为 Fourier 级数, 并应用谐波平衡法可得 Δa , Δb , $\Delta _$, ΔP_k 和 ΔQ_k 的线性代数方程组

$$A_n \Delta a + B_n \Delta b + C_n \Delta _ + A_{n,0} \Delta P_0 + \sum_{k=1}^M (A_{n,k} \Delta P_k + B_{n,k} \Delta Q_k) = R_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 2M+2) \quad (16)$$

方程 (16) 共 $2M+3$ 个方程, $2M+4$ 个未知量, 必须减少 1 个未知量. 当计算极限环振幅曲线时可令 $\Delta a = 0$, 解出 Δb , $\Delta _$, ΔP_k 和 ΔQ_k , 然后用 $b = b_0 + \Delta b$, $_ = _0 + \Delta _$, $H = H_0 + \Delta H$ 作为新的 b_0 , $_0$, H_0 , 从头再算. 这个过程称为迭代过程, 当 R_n 小于预先规定的误差时 (本文的算例误差为 10^{-5}), 迭代结束, 此时得到对应于 $\lambda = \Delta\lambda$ 的解 b , $_$ 和 H . 再以此值作为新的初值, 又给参数 λ 以增量 $\Delta\lambda$, 重复上述迭代过程, 经 N 次增量后, $\lambda = N\Delta\lambda$.

当 N 足够大, 就得到相当大参数对应的解 $b(a_0)$, $_{-}(a_0)$ 和 $H(h, a_0)$. 当 λ 达到所需的数值 $\bar{\lambda}$ 后固定 $\lambda = \bar{\lambda}$, 用新的 a_1 代替 a_0 , 用 $b(a_0)$, $_{-}(a_0)$ 和 $H(h, a_0)$ 作为新的初值 b_0 , $_{-}0$, H_0 , 重复上述计算过程. 如此不断变动 a_0 , $a_0 < a_1 < \dots < a_k$, 结果可得 $\lambda = \bar{\lambda}$ 对应的 $_{-} = _{(a_j)}$, $j = 0, 1, \dots, k$. 由此可作振幅曲线 $_{-} = _{(a)}$. 如果给定参数 $_{-}$ 计算极限环, 则可令 $\Delta_{-} = 0$, 解出 Δa , Δb , ΔP_k 和 ΔQ_k . 当达到规定的误差后, 给参数 λ 增量, 直到 λ 达到所需的数值时止.

2 半稳定极限环

为了判定极限环的稳定性, 可计算特征指数

$$\gamma = \frac{\lambda}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} [f(x, \dot{x}, _{-}) \dot{x}] dt = \frac{\lambda}{T} \int_0^{2\pi} f^*(a, b, _{-}, H, h) dh \quad (17)$$

$$\text{其中, } f^*(a, b, _{-}, H, h) = \left[\frac{f(x, \dot{x}, _{-}) + \dot{x} f_x(x, \dot{x}, _{-})}{H(h)} \right]_{x=a \cos h, \dot{x}=b}, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{dh}{H(h)}.$$

如果 $\gamma < 0 (> 0)$, 则极限环是稳定的 (不稳定的)^[1]. 对于半稳定的极限环, 必须满足条件

$$\int_0^{2\pi} f^*(a, b, _{-}, H, h) dh = 0 \quad (18)$$

因此, 半稳定极限环由方程 (5), (9), (10) 和 (18) 确定.

当 $\lambda \approx 0$ 时, 半稳定极限环的近似解 a_0 , b_0 , $_{-}0$ 和 H_0 由 (13)~(15) 式和

$$\int_0^{2\pi} f^*(a_0, b_0, _{-}0, H_0, h) dh = 0 \quad (19)$$

给出, 当 λ 不是小参数时, 可用增量法计算. 增量方程除 (16) 外还应补充

$$\Delta a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f^*}{\partial a} \right)_0 dh + \Delta b \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f^*}{\partial b} \right)_0 dh + \Delta _{-} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f^*}{\partial _{-}} \right)_0 dh + \Delta H \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f^*}{\partial H} \right)_0 dh - \int_0^{2\pi} f^*(a_0, b_0, _{-}0, H_0, h) dh = 0 \quad (20)$$

方程组 (16) 和 (20) 共 $2M+4$ 个方程, $2M+4$ 未知量, 因此, Δa , Δb 和 $\Delta _{-}$ 中任一个均不能预先给定. 这是半稳定极限环与稳定 (不稳定) 极限环的计算不相同之处. 半稳定极限环对应的 $_{-}$ 值是极限环的一个分叉值.

3 算 例

作为本方法的应用, 下面研究著名的有半稳定极限环的方程^[7]

$$\ddot{x} + x = \lambda (1 - _{-} x^2 + 5x^4) \dot{x} \quad (21)$$

其中, $\lambda > 0$, $_{-} > 0$, $f(x, \dot{x}, _{-}) = 1 - _{-} x^2 + 5x^4$, $g(x) = x$, $V(x) = x^2/2$. 不难验证方程满足条件 (11) 和 (12).

当 $\lambda \approx 0$ 时, 由 (13)~(15) 式得

$$H_0 = 1, b_0 = 0, _{-} = \frac{4}{3} a_0^{-2} + \frac{5}{6} a_0^2 = _{(a_0)} \quad (22)$$

由 (18) 和 (22) 式得半稳定极限环的近似解为

$$a_0 = \sqrt[4]{1.6} = a_0^*, _{-}0 = \frac{40}{9}, b_0 = 0, H_0 = 1 \quad (23)$$

把 (22) 式代入 (17) 式得, 当 $a_0 < a_0^*$ 时, $\gamma < 0$; 当 $a_0 > a_0^*$ 时, $\gamma > 0$. 振幅函数 $_{-}(a_0)$ 在 $a_0 = a_0^*$ 时有极小值 $_{-} = \frac{40}{9} = _{-}^*$. 根据 $_{-}(a_0)$ 和特征指数 γ 的性质可知, 当 $_{-} > _{-}^*$ 时方程 (21) 有 2 个极限环, 小环稳定, 大环不稳定; 当 $_{-} = _{-}^*$ 时有 1 个半稳定极限环; 当 $_{-} < _{-}^*$ 时无极限环, $_{-}^*$ 是 $\lambda \approx 0$ 时方程 (21) 极限环的分叉值.

对于 λ 为非小参数时振幅函数和极限环分叉值的计算这里以 $\lambda=5$ 为例说明之. 先考虑振幅函数, 令 $a_0=0.1$ 代入方程 (22) 得 $H_0=1, b_0=0, \mu_0=133.34$. 以此作为初值并取 $\Delta\lambda=0.5, \Delta a=0, M=30$ 代入方程组 (16), 对 λ 进行 10 次增量后可得 $\lambda=5, a_0=0.1$ 对应的 b, μ 和 $H(h)$. 然后固定 $\lambda=5$, 改变 a_0 为 $a_k=0.1 \times (1+k), k=1, 2, \dots$, 继续进行上述迭代过程可得振幅函数的值 $\mu(a_k)$. 同时可计算特征指数 $\gamma(a_k)$. 由此作出 $\lambda=5$ 的振幅曲线如图 1 所示.

再计算半稳定极限环, 以 (23) 式为初值, 取 $\Delta\lambda=0.5, M=30$ 代入方程组 (16) 和 (20), 对 λ 进行 10 次增量后求得半稳定极限环对应的 a^* 和 μ^* 列于表 1. $\lambda=5$ 的半稳定极限环如图 2 所示. 计算表明振幅曲线 $\mu(a)$ 在 $a=a^*$ 时达到最小值 μ^* , $\mu > \mu^*$ 时有 2 个极限环, 当 $a < a^*$ 时特征指数 $\gamma < 0$, 极限环稳定; 当 $a > a^*$ 时特征指数 $\gamma > 0$, 极限环不稳定. 文 [7] 给出了定性结果, 而本文则给出定量结果.

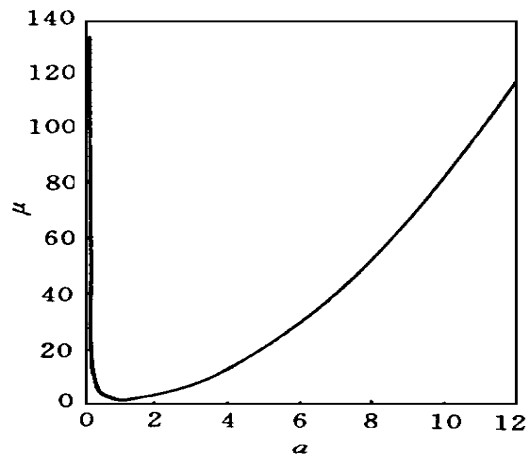


图 1 方程 (21) $\lambda=5$ 时参数 μ 随
极限环振幅 a 的变化

Fig. 1 The parameter μ versus the amplitude a of the
limit cycle of equation (21) for $\lambda=5$

从上述可知 Lénard 方程当 $\lambda \approx 0$ 时的极限环稳定性指标, 半稳定极限环和极限环振幅与参数的关系都很容易计算; 而对于 λ 为任意值的情形可用参数增量法求解. 于是对于给定参数范围内极限环的个数、稳定性、半稳定极限及其分叉值可以完全确定. 本文为研究极限环提供了一个有效的定量方法.

表 1 方程 (21) 不同 λ 值半稳定
极限的 μ^* 和 a^* 值

Tab. 1 Values of μ^* and a^* at the semi-stable
limit cycles of equation (21) for λ

λ	μ^*	a^*
0.5	2.109	1.126
1.0	2.112	1.129
1.5	2.117	1.135
2.0	2.124	1.143
2.5	2.133	1.155
3.0	2.145	1.168
3.5	2.156	1.183
4.0	2.167	1.196
4.5	2.176	1.206
5.0	2.184	1.215

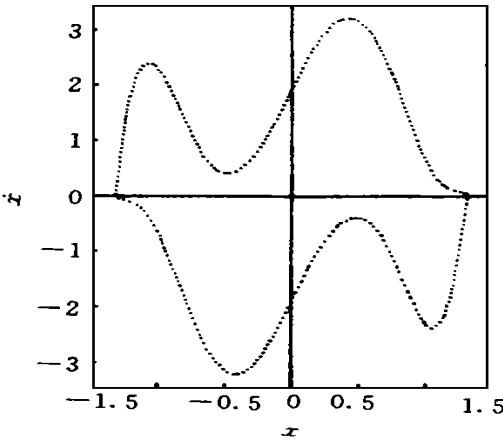


图 2 方程 (21) $\lambda=5$ 时半稳定极限环相图

Fig. 2 Semi-stable limit cycle phase graph
of equation (21) for $\lambda=5$

参 考 文 献

- 1 叶彦谦. 极限环论. 上海: 上海科学技术出版社, 1984. 89~ 175
- 2 张芷芬. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985. 196~ 374
- 3 蔡燧林. 二次系统研究近况. 数学进展, 1989, 18 (1): 5~ 21
- 4 Chan H S Y, Chung K W, Xu Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators. Int J Non-linear Mechanics, 1996, 31 (1): 59~ 72
- 5 Xu Z, Chan H S Y, Chuang K W. Separatrices and limit cycles of strongly non-linear oscillators by the perturbation-incremental method. Nonlinear Dynamics, 1996, 11 (3): 213~ 233
- 6 徐兆, 黄炳彪. 非线性振子极限环的实用分析法. 力学与实践, 1988, 10 (5): 6~ 10
- 7 Rydkov G S. The maximum number of limit cycles of the system $\dot{y}=x, \dot{x}=y-\sum_{i=0}^2 a_i x^{2i+1}$ is two. Differentsialnye Uravneniya, 1975, 11 (2): 390~ 391

Calculation of Semi-Stable Limit Cycles of L^εnard Equation

Chen Shuhui* Huang Wulin Xu Zhao

Abstract The semi-stable limit cycles and bifurcations of L^εnard equation are studied by the perturbation-incremental method. Firstly, a perturbation method is used to obtain an initial solution for the case $\lambda \approx 0$ by using a nonlinear time transform and rewriting the differential equation as an integral equation. Secondly, because the new solution scheme is based on an incremental approach, the parameter λ can take arbitrary values. Finally, a practical example is given to show the efficiency of the method.

Keywords L^εnard equation, semi-stable limit cycles, bifurcation, perturbation-incremental method

。 简 讯 。

本 刊 启 事

为促进国内外学术交流, 本刊已入编《中国学术期刊 (光盘版) 》, 并以摘要和全文的形式逐步进入中国教育网和广东金科网等网络系统. 来稿一经本刊录用, 将同时被光盘版收录和进入有关的网络. 并在印刷版出版后一次性发放稿酬.

中山大学学报 (自然科学版) 编辑部

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China